Valószínűségszámítás

3. előadás

Arató Miklós

2023.03.16.

Tartalomjegyzék

Tönkremenési feladat

Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten 1/2 valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot.
A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri.
Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van.
Mekkora valószínűséggel megy tönkre Péter?

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.
B_1 : az első lépésben Péter nyer,
B_2 : az első lépésben Gábor nyer.

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.
B_1 : az első lépésben Péter nyer,
B_2 : az első lépésben Gábor nyer.
Ekkor
$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = p(k+1) \cdot \frac{1}{2} + p(k-1) \cdot \frac{1}{2}$,
ahol $1 \leq k \leq n-1$.
$\Rightarrow 2 \cdot p(k) = p(k+1) + p(k-1)$
$\Rightarrow p(k+1) - p(k) = p(k) - p(k-1) = d$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d.$$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d.$

$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}.$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d.$

$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}.$

$p(k) = 1 - \frac{k}{n}, 1 - p(k) = \frac{k}{n}$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d.$

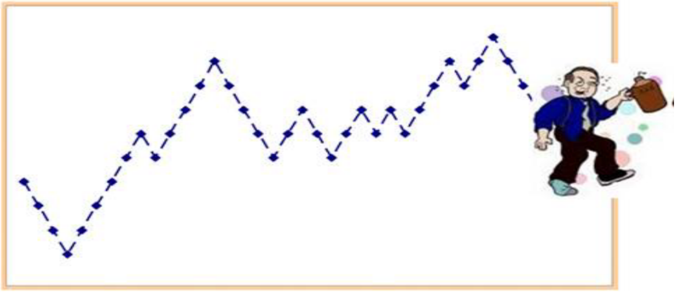
$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}.$

$p(k) = 1 - \frac{k}{n}, 1 - p(k) = \frac{k}{n}$

$k = 10, n = 26 \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{10}{26} = \frac{8}{13}.$

Szimmetrikus bolyongás

Egy számegyenesen lépegetünk az egészeken 0-ból kiindulva, minden lépésben ugyanakkora eséllyel lépünk balra, mint jobbra. Kérdés: mekkora valószínűséggel térünk vissza a 0-ba? (ezt az eseményt jelöljük C-vel)



Megoldás

Legyen D_1, hogy az első lépésben jobbra, ill. D_2, hogy az első lépésben balra megyünk.
$P(C) = P(C|D_1) \cdot \frac{1}{2} + P(C|D_2) \cdot \frac{1}{2}$
$P(C|D_1)$: annak valószínűsége, hogy 1-ből eljutunk 0-ba
$P(C|D_1) \geq P(\text{1-ből előbb jutunk el 0-ba, mint } n\text{-be}) = 1 - \frac{1}{n}$ minden n-re $\Rightarrow$
$P(C|D_1) \geq 1 - \frac{1}{n}$ minden n-re $\Rightarrow$
$P(C|D_1) = 1$, ugyanígy $P(C|D_2) = 1$, azaz $P(C) = 1$.
Megjegyzés: 2 dimenzióban még ugyanennyi, de 3 dimenzióban már 1-nél kisebb ez a valószínűség.

Meghatározás

Definíció: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.

Meghatározás

Definíció: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.
Definíció: A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan x_i valós számok és A_i teljes eseményrendszer, hogy $\xi = \sum_k x_k \cdot \chi_{A_k}$.

Indikátor és binomiális

Az $A \in \mathcal{A}$ esemény **indikátor valószínűségi változója**

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1 & : \quad w \in A \\ 0 & : \quad w \notin A \end{cases}.$$

Binomiális eloszlás: Vegyünk n független kísérletet, ahol egy kísérlet p valószínűséggel sikeres, és ξ jelölje a sikeres kísérletek számát ($0 \leq k \leq n$).

$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Jelölés: $B(n, p)$.

Példa: 6-osok száma 40 kockadobásból.

Geometriai

Geometriai (Pascal-)eloszlás: Független kísérleteket végzünk, amelyek p valószínűséggel sikeresek, η az első sikeres kísérlet sorszáma ($k = 1, 2, \ldots$).

Geometriai

Geometriai (Pascal-)eloszlás: Független kísérleteket végzünk, amelyek p valószínűséggel sikeresek, η az első sikeres kísérlet sorszáma $(k = 1, 2, \ldots)$.
$P(\eta = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$
Példa: Kockadobásoknál első 6-os dobás sorszáma.
Állítás: A Pascal-eloszlás **örökifjú tulajdonságú**, azaz
$P(\xi > k + l \mid \xi > k) = P(\xi > l)$.
Bizonyítás: $P(\xi > k + l \mid \xi > k) = \frac{P(\xi>k+l \ \wedge \ \xi>k)}{P(\xi>k)} = \frac{P(\xi>k+l)}{P(\xi>k)} = \frac{(1-p)^{k+l}}{(1-p)^k} = (1 - p)^l = P(\xi > l)$.

Hipergeometrikus

Hipergeometriai eloszlás: Adott egy dobozban M piros és $N - M$ fehér golyó, ezekből húzunk véletlenszerűen n darabot.
Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát (visszatevés nélkül), és legyen $k = 0, 1, \ldots, \min(M, n)$.

Hipergeometrikus

Hipergeometriai eloszlás: Adott egy dobozban M piros és $N-M$ fehér golyó, ezekből húzunk véletlenszerűen n darabot.
Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát (visszatevés nélkül), és legyen $k = 0, 1, \ldots, \min(M, n)$.
$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Poisson

Poisson-eloszlás: Legyen $0 < \lambda$ fix paraméter, továbbá $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$$P(\eta = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1.$$

Negatív binomiális

Negatív binomiális eloszlás: Független kísérleteket végzünk, amelyek p valószínűséggel sikeresek.
ξ az r-edik sikeres kísérlet sorszáma (ahol r rögzített).
$P(\xi = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot (1-p)^{k-r} \cdot p^r$, ahol $k = r, r+1, \ldots$.
Megjegyzés: $r = 1$-re pont a Pascal-eloszlást kapjuk.

Meghatározás és tulajdonságok

Definíció: $\xi \geq 0$ **diszkrét**, ekkor $E\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$.

Definíció: ξ **diszkrét**, ekkor $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, ha $\min(E\xi^+, E\xi^-) < \infty$.

Tulajdonságok:

1. $E(c \cdot \xi) = c \cdot E\xi$.
2. Ha $\xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta$.
3. Ha létezik $E\xi$, akkor $|E\xi| \leq E|\xi|$.
4. Ha létezik $E\xi$, $E\eta$, és $E\xi + E\eta$ értelmes, akkor $E(\xi + \eta) = E\eta + E\xi$ is létezik.
5. Ha $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow E\xi = 0$.

Diszkrét példák

1. c konstans valószínűségi változó $\Rightarrow Ec = c$.
2. A indikátorárának várható értéke
   $E\chi_A = 0 \cdot P(\chi_A = 0) + 1 \cdot P(\chi_A = 1) = P(A)$.
3. $\xi \sim B(n, p)$ **binomiális** eloszlású valószínűségi változó. Ekkor
   $E\xi = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$
   $$np \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)}}_{=(p+(1-p))^{n-1}=1} = np.$$

Diszkrét példák

1. c konstans valószínűségi változó $\Rightarrow Ec = c$.
2. A indikátorárának várható értéke
$E\chi_A = 0 \cdot P(\chi_A = 0) + 1 \cdot P(\chi_A = 1) = P(A)$.
3. $\xi \sim B(n, p)$ **binomiális** eloszlású valószínűségi változó. Ekkor
$$E\xi = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} =$$
$$np \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)}}_{=(p+(1-p))^{n-1}=1} = np.$$
$\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ (független indikátorok összege)$\Rightarrow$
$E\xi = E\eta_1 + \ldots + E\eta_n = np$.

Diszkrét példák folytatás

4) $\xi \sim \lambda$-**Poisson**, ekkor
$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=1} = \lambda.$$

5) Visszatevés nélkül húzzunk a dobozból. Ekkor a ξ valószínűségi változó **hipergeometrikus** eloszlású, és várható értéke: $E\xi = \sum_{k=0}^{\min(n,M)} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Az egyszerűbb kiszámítás céljából legyen $\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_M$, ahol $\eta_i := 1$, ha az i-edik piros golyót kihúztuk, különben pedig 0. Ekkor $P(\eta_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$, így $E\xi = n \cdot \frac{M}{N}$.

Meghatározás és Teljes várható érték tétel

Definíció: $P(A) > 0$, ξ diszkrét, ekkor ξ **feltételes várható értéke** az A feltételre nézve:
$E(\xi|A) = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k|A)$.

Teljes várható érték tétel: ξ diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel és $A_1, A_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, ahol $0 < P(A_i)$. Ekkor $E\xi = \sum_n E(\xi|A_n) \cdot P(A_n)$.

Wald-azonosság

$X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyekre létezik EX_i, és N egy tőlük független pozitív, egészértékű valószínűségi változó.
Ekkor $E(X_1 + \ldots X_N) = EX_1 \cdot EN$.
$P(X_1 + \ldots + X_N = y | N = n) = \frac{P(X_1 + \ldots + X_n = y, N = n)}{P(N = n)} =$
$P(X_1 + \ldots + X_n = y) \Rightarrow E(X_1 + \ldots + X_N = y | N = n) = n \cdot EX_1 \Rightarrow$
$E(X_1 + \ldots + X_N) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_1 + \ldots + X_N | N = n) \cdot P(N = n) =$
$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot EX_1 \cdot P(N = n) = EX_1 \cdot EN$

Geometriai eloszlás

$P(\eta = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$, ahol $k \geq 1$.

$E\eta = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p.$

A : az első kísérlet sikeres

$E\eta = E(\eta|A) \cdot P(A) + E(\eta|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \Rightarrow$

$E\eta = 1 \cdot p + (1 + E\eta) \cdot (1-p) \Rightarrow E\eta = \frac{1}{p}$

Várhatóan mikor lesz meg mind a 24 törpünk?

$\frac{24}{24} + \frac{24}{23} + \ldots + \frac{24}{2} + \frac{24}{1} = 90,623$

szimmetrikus bolyongás

ξ : lépések száma n-ből 0-ba ($n \geq 0$), $v(n) := E\xi$.
A : az első lépésben jobbra lépünk $\Rightarrow E\xi = E(\xi|A) \cdot \frac{1}{2} + E(\xi|\overline{A}) \cdot \frac{1}{2}$
$E(\xi|A) = 1 + v(n+1)$ és $E(\xi|\overline{A}) = 1 + v(n-1) \Rightarrow$
$2v(n) = 2 + v(n+1) + v(n-1)$
$v(0) = 0$
$v(n+1) - v(n) = v(n) - v(n-1) - 2 = \ldots = v(1) - v(0) - 2n. \Rightarrow$
$v(n) = v(n) - v(n-1) + v(n-1) + v(n-2) + \ldots + v(1) - v(0) + v(0)$
$\Rightarrow n \cdot v(1) - n(n-1) = n(v(1) - (n-1)) \geq 0 \Rightarrow v(1) \geq n - 1$
minden n-re $\Rightarrow v(1) = +\infty \Rightarrow$
szimmetrikus bolyongásnál várhatóan végtelen sok lépésben térünk vissza a kiindulási pontba.