Valószínűségszámítás
1. előadás

Arató Miklós

Esély

Várható

Kockázat

Véletlen

Hiba

Előrejelzés

ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Követelmények

- Szóbeli vizsga rövid beugróval
- Gyakorlat sikeres teljesítése
- Teams és Moodle használata

- Diák, ajánlott irodalom, stb:

http://amiklos.web.elte.hu/Oktatas/2020_valszam/Valszam1_2020.htm

Hagyományosan

Egy kis történelem

- Ókorról semmit sem tudunk
- Fermat és Pascal levelezése (1654)
- Jakob Bernoulli: nagy számok törvénye (XVII. század vége)
- Bayes-formula (1763)
- Laplace: Théorie analitique des probabilités (1812)
- Kolmogorov: axiómák (1933)

Klasszikus valószínűségi mező

- Esemény valószínűsége:

"kedvező" esetek száma/összes esetek száma

- Ω: alaphalmaz, biztos esemény (ebben az esetben véges)
- $\omega \in \Omega$: elemi esemény
- $A \subseteq \Omega$: esemény
- $P(A) := |A| / |\Omega|$

Példák 1.

- A valószínűségszámítási példák gyakran köznapi nyelven vannak megfogalmazva.
- Óvatosan alkalmazzuk a klasszikus valószínűségi mezőt!
- Egyszer dobunk fel egy érmét. Mennyi a valószínűsége, hogy fejet dobunk?
- $\Omega=\{F,I\}$, P(fejet dobunk)=P(F)
- Jó-e itt a klasszikus mező?
- Szabályos érme esetében igen.

Példák 2.

- 2 lovag addig játszik, amíg az egyik 6 játékot nem nyer. A játékok igazságosak mindkét lovagnak ugyanannyi az esélye a nyerésre.
- Amikor az első lovag már 5 játékot nyert, a másik csak 3-at, akkor a várat megtámadják. Milyen arányban igazságos megosztani a tétet?
- 5:3, 3:1, 7:1 vagy 1:0 arányban?
- Legyen a nyerési valószínűség arányában.

Példák 2. (folyt.)

- Nézzük meg, hogy mi történhet a következő 3 játékban!
- Ω={111; 112; 121; 122; 211; 212; 221; 222}
- Második játékos csak a {222} esetben nyeri meg a tétet.
- P(1. nyeri a tétet)=7/8.

Példák 3. (de Méré lovag másik problémája)

Minek van nagyobb esélye? Annak, hogy egy szabályos kockát háromszor feldobva az eredmény 11, vagy annak, hogy az eredmény 12. de Méré lovag így érvelt: 11-et kapunk, ha

6,4,1; 6,3,2; 5,5,1; 5,4,2; 5,3,3; 4,4,3

12-öt ha

6,5,1; 6,4,2; 6,3,3; 5,5,2; 5,4,3; 4,4,4

a dobások eredménye. Tehát mindkét lehetőség ugyanolyan eséllyel következik be. Mi a "hiba" de Méré lovag érvelésében?

Mi az „összes eset"?

- r=6 golyót teszünk N=8 dobozba. Mennyi a valószínűsége, hogy k=2 golyó kerül az első dobozba?

Maxwell-Boltzmann statisztika

- $\Omega = \{(i_1, \dots, i_r): 1 \leq i_j \leq N\}$

- Összes esetszám: $|\Omega| = N^r = 8^6$

- „Kedvező" esetek száma:

$$\binom{r}{k}(N-1)^{r-k} = \binom{6}{2}(8-1)^{6-2} = 13{,}74\%$$

Bose-Einstein statisztika

- $\Omega = \{(j_1, \dots, j_N): 0 \le j_l, j_1 + \cdots + j_N = r\}$

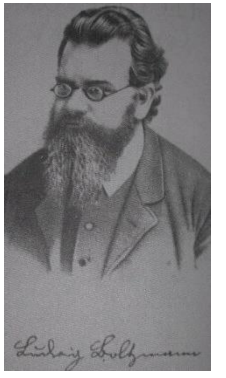
- Összes esetszám: $\binom{r+N-1}{N-1} = \binom{6+8-1}{8-1}$

- „Kedvező" esetek száma:
$$\binom{r-k+N-2}{N-2} = \binom{6-2+8-2}{8-2}$$

- Valószínűség: 12,24%

Melyik az igazi?

- Maxwell–Boltzmann statisztika: a statisztikus mechanikában alkalmazható a gázmolekulák rendszereire



- Bose–Eistein statisztika: fotonrendszerek

Geometriai valószínűségi mező

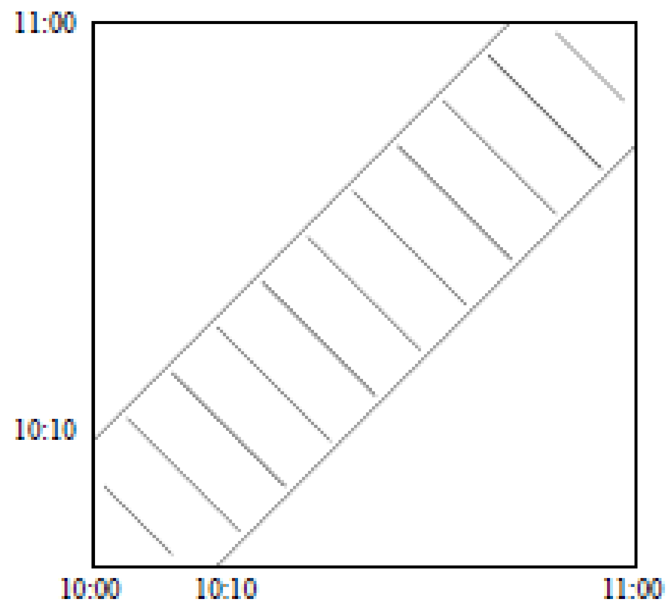
- Esemény valószínűsége:

Esemény térfogata/teljes térfogat

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$: alaphalmaz, biztos esemény (ebben az esetben véges térfogatú)
- $\omega \in \Omega$: elemi esemény
- $A \subseteq \Omega$: esemény (olyan aminek "van térfogata")
- $P(A) := |A| / |\Omega|$

Példák 1.

- Péter és Juli 10 és 11 óra között találkoznak, legfeljebb 10 percet várva a másikra. Mekkora valószínűséggel találkoznak?



- P(találkoznak)=1-P(nem találkoznak)=11/36

Példák 2.

- Mekkora valószínűsége, hogy egy körbe húzott húr hossza nagyobb a körbe írt szabályos háromszög oldalhosszánál?

- P(találkoznak)=1-P(nem találkoznak)=11/36


LIDL

Törp
Törpapa
Törpilla
Hókuszpók
Törperős
Kertitörp
Okoska
Törpojáca
Dulifuli
Ügyifogyi
Sziamiaú
Katti
Törpvihar
Buki sötétben világít
Királyi törp arany
Törpingál
Nótata
Lusti
Tréfi
Vadócka
Hami
Költörp
A lila törp
Habzsi

Poincaré-formula

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ események. Ekkor egyesítésük valószínűsége:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)},$$

ahol

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 < i_1 < \cdots < i_k} P\left(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\right)$$

9737209

Megoldás

- $A_i: i -$ edik típusú figura nincs meg (50 figuránk van)
- Kérdés: $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{24})$=?
- $P\left(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\right) = \frac{(24-k)^{50}}{24^{50}}$
- $S_k^{(n)} = \binom{24}{k}\left(\frac{24-k}{24}\right)^{50}$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{24}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{24}{k}\left(\frac{24-k}{24}\right)^{50} = 0{,}9737209$

Feltételes valószínűség

- Amennyiben $P(B) > 0$, akkor az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűsége:
$$P(A|B) \coloneqq \frac{P(AB)}{P(B)}$$
- Kombinatorikus valószínűségi mező esetén:

$$P(A|B) = \frac{\frac{|AB|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|AB|}{|B|}$$

Feltételes valószínűség (folyt.)

- Amennyiben $P(B) > 0$, akkor $(\Omega, \mathcal{A}, P(.\,|B))$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező lesz.

$$\Longrightarrow$$

- A „"normál" valószínűségre bizonyítottak a feltételes valószínűségre is teljesülnek.

Az ügyvédnek vagy ügyésznek volt igaza ?

- Nicole Brown-t 1994-ben gyilkolták meg. Férjét, O.J. Simpsont, gyanúsították meg.
- Az ügyész külön hangsúlyozta, hogy Simpson korábban már bántalmazta feleségét.
- Az ügyvéd válaszában arra hivatkozott, hogy a statisztikák szerint "csak" minden 100-adik bántalmazó férj öli meg feleségét. Valójában a házastársuk/élettársuk által bántalmazottak közül "csak" minden 2500-adikat öli meg házastársuk/élettársuk.

Az ügyvédnek vagy ügyésznek volt igaza ? (folyt.)

- Valójában a helyes kérdés az, hogy milyen valószínűséggel ölte meg a feleségét a férj, ha a feleséget megölték és ő korábban bántalmazta a feleséget?
- 1/20000 annak az esélye, hogy valakit megölnek az USA-ban.
- Csak a bántalmazottak körét tekintjük.
- B: férj öli meg, C: nem férj öli meg
- Kérdés: $P(B|B \cup C) =?$

$$P(B|B \cup C) = \frac{P(B)}{P(B \cup C)} = \frac{\frac{1}{2500}}{\frac{1}{2500} + \frac{1}{20000}} = \frac{8}{9}$$

Bayes-formula

- Tegyük fel, hogy $P(B) > 0, 0 < P(A) < 1$, ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

Bizonyítás:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(BA)}{P(BA)+P(B\bar{A})} =$$

$$= \frac{\frac{P(BA)}{P(A)}P(A)}{\frac{P(BA)}{P(A)}P(A) + \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}P(\bar{A})}$$

Mammográfiás vizsgálat

- 50 éves nő (tünetek nélkül) rutin mammográfiás vizsgálaton vett részt.
- A teszt pozitív lett.
- Mennyi a valószínűsége, hogy emlődaganata van?
- Adatok:
  - 50 éves nőnél emlődaganat valószínűsége 1%
  - Emlődaganat felismerésének valószínűsége 90%
  - Emlődaganat nélkül pozitív teszt valószínűsége 9%

Melyikhez van közelebb a valószínűség?

- 1%
- 10%
- 90%

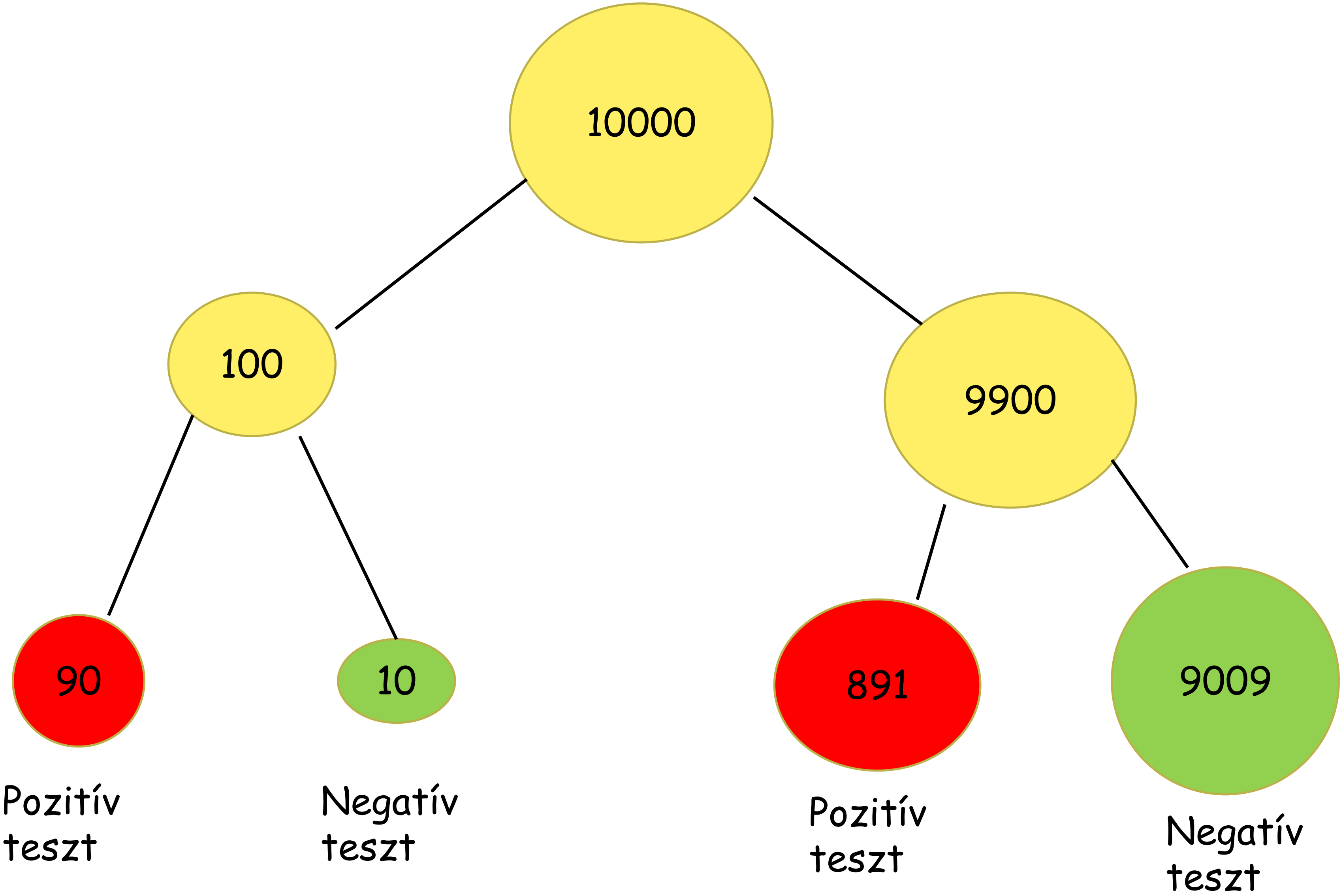
Megoldás

- Legyen A: emlődaganata van, B: pozitív a teszt. Ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} =$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}09 \cdot 0{,}99} = 0{,}09174312$$

Gyakoriságok



Teljes eseményrendszer

- Definíció: $A_1, A_2, \ldots$ teljes eseményrendszert alkotnak, ha

$$A_i A_j = \emptyset, i \neq j\text{-re és}$$

$$\bigcup_i A_i = \Omega$$

Teljes valószínűség tétele

- Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots$ $(0 < P(A_i))$ teljes eseményrendszer, ekkor

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

Bizonyítás:

$$B = \bigcup_i BA_i \Longrightarrow P(B) = \sum_i P(BA_i) = \sum_i \frac{P(BA_i)}{P(A_i)} P(A_i)$$

Szindbád és a háremhölgyek

- Szindbád a szultánnak tett szolgálataiért cserében 100 háremhölgy közül választhat. Azonban a háremhölgyeket nem egyszerre, hanem sorban egymás után mutatják be neki. Amennyiben egy bemutatott hölgyet nem választ ki azonnal, úgy már az örökké elveszik számára. Milyen stratégiát válasszon Szindbád, hogy a legszebb választásának minél nagyobb legyen a valószínűsége?

Stratégia

- Szindbád azt a stratégiát választja, hogy elengedi az első k hölgyet, és az utána következők közül az addigi legszebbet választja.
- Mennyi az optimális k?

Megoldás

- A_i: $i -$ edik hölgyet választja Szindbád $(i = k + 1, k + 2, \ldots, n = 100)$.
- A_0 egyik hölgyet sem választja ki Szindbád
- $A_0, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ teljes eseményrendszer
- B: a legszebbet választja ki

Megoldás (folyt.)

- $P(B) = \sum_i P(BA_i)$
- $P(BA_0) = 0$
- $P(BA_i) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (i-2) \cdot 1 \cdot i \cdot \ldots \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} =$
$$= \frac{k}{(i-1)n}$$
- $P(B) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{k}{(i-1)n} = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$
- Milyen k-ra lesz ez maximális?

Megoldás (folyt.)

- k_n^*: az optimális érték
- $\frac{n}{k_n^*} \to e$

Bayes-formula általános alakja

- Tegyük fel, hogy $P(B) > 0, A_1, A_2, \ldots$

$(0 < P(A_i))$ teljes eseményrendszer, ekkor

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Bizonyítás:

$$P(A_k|B) = \frac{P(BA_k)}{P(B)} = \frac{\frac{P(BA_k)}{P(A_k)}P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Monty Hall-paradoxon

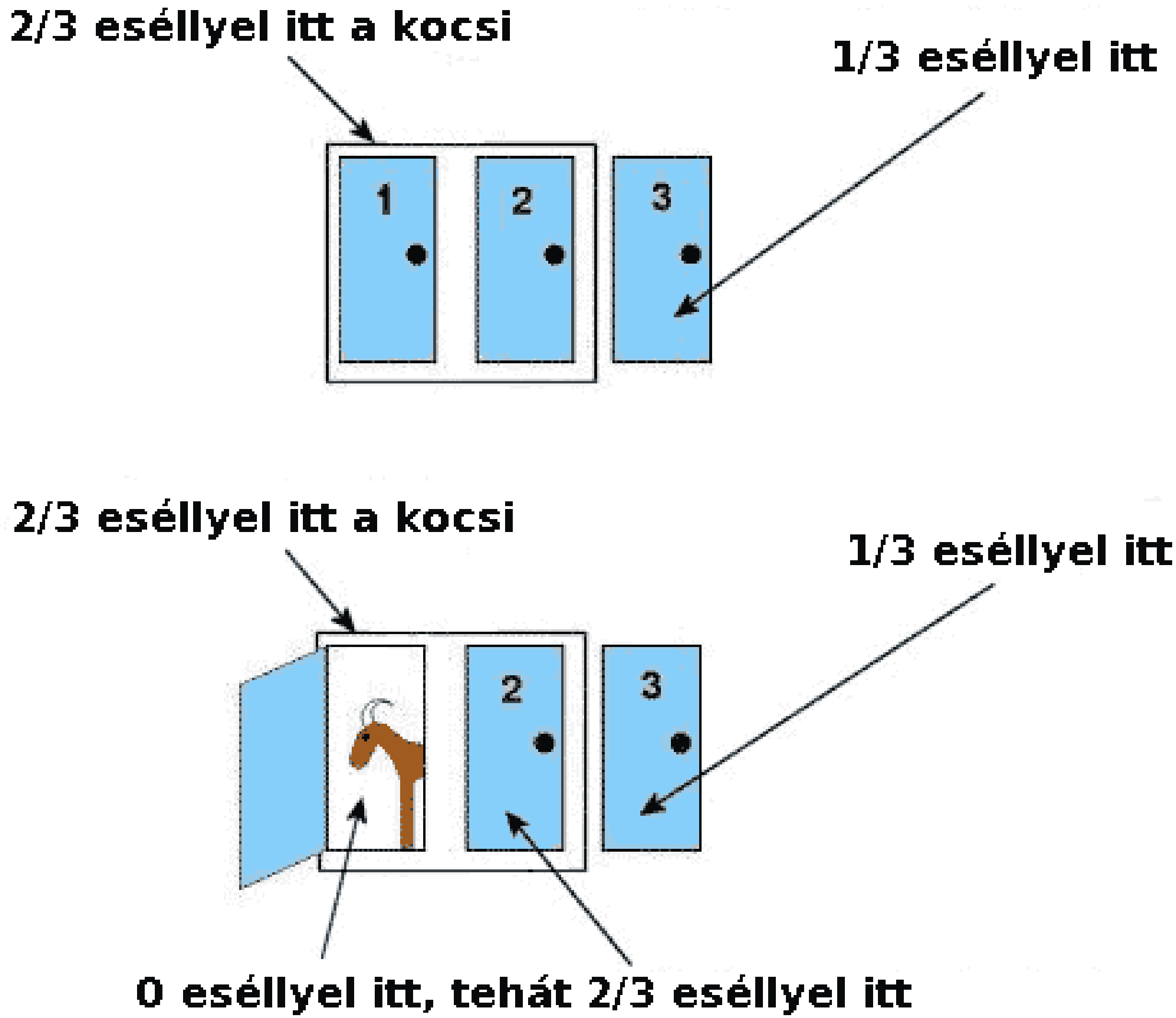
- Képzeljük el, hogy egy vetélkedőben szerepel, és három ajtó közül kell választania. Az egyik mögött kocsi van, a másik kettő mögött viszont kecske. Tegyük fel, hogy maga a 3. ajtót választja, mire a műsorvezető, aki tudja, melyik ajtó mögött mi van, kinyitja az 1. ajtót, megmutatván, hogy amögött kecske van. Ezután önhöz fordul, és megkérdezi: „Nem akarja esetleg mégis a 2. ajtót választani?" Vajon előnyére válik, ha vált?

Megoldás

- A_i: $i-$edik ajtó mögött van a kocsi
- $P(A_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$
- B: műsorvezető az első ajtót nyitja ki
- Kérdés: $P(A_3|B) = ?$
- $P(A_3|B) =$

$$\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1\,1}{2\,3}}{0\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}+\frac{1\,1}{2\,3}} = \frac{1}{3}$$


2/3 eséllyel itt a kocsi
1/3 eséllyel itt
1
2
3
2/3 eséllyel itt a kocsi
1/3 eséllyel itt
2
3
0 eséllyel itt, tehát 2/3 eséllyel itt

Függetlenség

- Az egyik legfontosabb valószínűségszámítási fogalom.
- Definíció: A és B függetlenek, ha $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Ha $P(B) > 0$, akkor

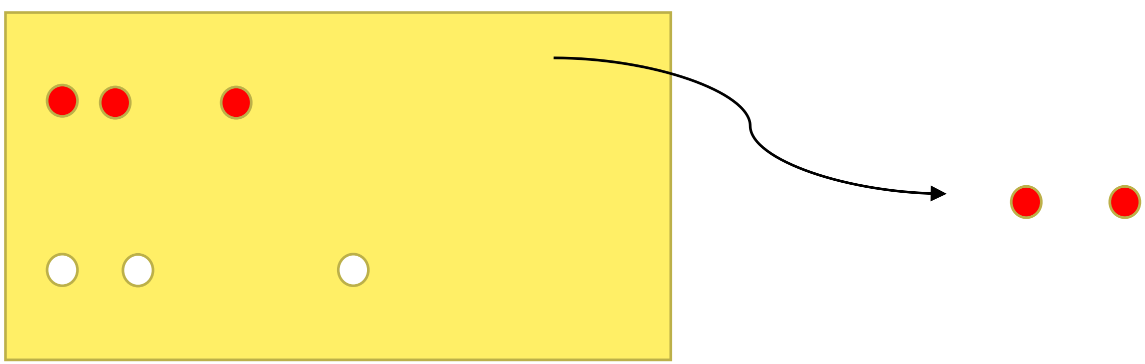
A és B függetlenek $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Bizonyítás:

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \underset{P(B)>0}{\Longleftrightarrow} P(AB) = P(A)P(B)$$

Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban M piros és $N - M$ fehér golyó van. 2-szer húzunk.
- A: elsőre pirosat, B: másodikra pirosat húzunk. Függetlenek-e?



Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel (folyt.)

- $P(A) = P(B) = \frac{M}{N}$.
- Visszatevésesnél:

$$P(AB) = \frac{M^2}{N^2} = P(A)P(B).$$

- Visszatevés nélkül:

$$P(AB) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)} \neq P(A)P(B).$$

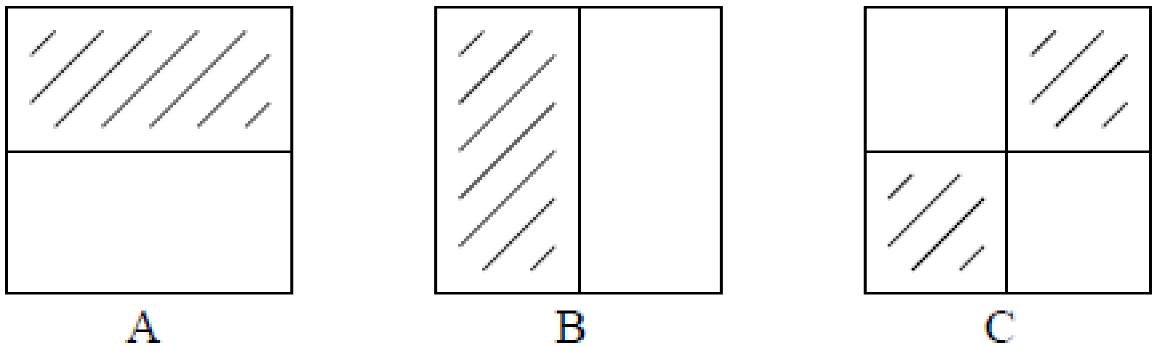
Több esemény függetlensége

- Definíció: $A_1, A_2, \dots, A_n$ függetlenek, ha bárhogy választunk ki közülük k darabot ($2 \leq k \leq n$) úgy:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k})$$

- Nem elég sem a páronkénti függetlenség, sem az "n-es szorzat"!

Páronkénti, de nem teljes függetlenség



$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \tfrac{1}{4}$$

$$P(ABC) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Jogos volt-e az ítélet?

- 1999-ben egy brit bíróság elítélte Sally Clarkot, mert 2 gyermeke is hirtelen csecsemőhalállal hunyt el.
- Az indok az volt, hogy a gyermekorvos szakértő szerint egy csecsemőnél 1/8500 az esélye egy ilyen halálesetnek, ezért a bíróság szerint a 2 eset valószínűsége ~ 1/73 millió.
- Későbbi kutatások kimutatták, hogy az első haláleset után a második esetnek már 1/100 az esélye (nem függetlenek).

Letöltés

http://amiklos.web.elte.hu/Oktatas/2017_inf/Valszam_2_publ.pdf