

Valószínűségszámítás

2. előadás

Arató Miklós

Esély

Várható

Kockázat

Véletlen

Hiba

Előrejelzés

ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Poincaré-formula (már szerepelt)

- A_1, A_2, \dots, A_n események. Ekkor egyesítésük valószínűsége:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k^{(n)},$$

ahol

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 < i_1 < \dots < i_k} P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Megoldás

- A_i : i – edik típusú figura nincs meg (50 figuránk van)
- Kérdés: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{24}) = ?$
- $P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = \frac{(24-k)^{50}}{24^{50}}$
- $S_k^{(n)} = \binom{24}{k} \left(\frac{24-k}{24}\right)^{50}$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{24}) = \sum_{k=1}^{24} (-1)^{k+1} \binom{24}{k} \left(\frac{24-k}{24}\right)^{50} = 0,9737209$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Feltételes valószínűség

- Amennyiben $P(B) > 0$, akkor az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűsége:

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Kombinatorikus valószínűségi mező esetén:

$$P(A|B) = \frac{\frac{|AB|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|AB|}{|B|}$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Feltételes valószínűség (folyt.)

- Amennyiben $P(B) > 0$, akkor $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot | B))$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező lesz.

\Rightarrow

- A „normál” valószínűségre bizonyítottak a feltételes valószínűségre is teljesülnek.

Az ügyvédnek vagy ügyésznek volt igaza ?

- Nicole Brown-t 1994-ben gyilkolták meg. Férjét, O.J. Simpsonsot, gyanúsították meg.
- Az ügyész külön hangsúlyozta, hogy Simpson korábban már bántalmazta feleségét.
- Az ügyvéd válaszában arra hivatkozott, hogy a statisztikák szerint "csak" minden 100-adik bántalmazó férj öli meg feleségét. Valójában a házastársuk/élettársuk által bántalmazottak közül "csak" minden 2500-adikat öli meg házastársuk/élettársuk.

Az ügyvédnek vagy ügyésznek volt igaza? (folyt.)

- Valójában a helyes kérdés az, hogy milyen valószínűséggel ölte meg a feleségét a férj, ha a feleséget megölték és ő korábban bántalmazta a feleséget?
- 1/20000 annak az esélye, hogy valakit megölnék az USA-ban.
- Csak a bántalmazottak körét tekintjük.
- B : férj öli meg, C : nem férj öli meg
- Kérdés: $P(B|B \cup C) = ?$

$$P(B|B \cup C) = \frac{P(B)}{P(B \cup C)} = \frac{\frac{1}{2500}}{\frac{1}{2500} + \frac{1}{20000}} = \frac{8}{9}$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Bayes-formula

- Tegyük fel, hogy $P(B) > 0, 0 < P(A) < 1$, ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(BA)}{P(BA)+P(B\bar{A})} = \\ &= \frac{\frac{P(BA)}{P(A)} P(A)}{\frac{P(BA)}{P(A)} P(A) + \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} P(\bar{A})} \end{aligned}$$

Fontos! Ez nem jöjjön! A diasoron nem minden szerepel!

Mammográfiás vizsgálat

- 50 éves nő (tünetek nélkül) rutin mammográfiás vizsgálaton vett részt.
- A teszt pozitív lett.
- Mennyi a valószínűsége, hogy emlődaganata van?
- Adatok:
 - 50 éves nőnél emlődaganat valószínűsége 1%
 - Emlődaganat felismerésének valószínűsége 90%
 - Emlődaganat nélkül pozitív teszt valószínűsége 9%

Fontos! Ez nem jegyzet! A
díjasoron nem minden szerepel!

Melyikhez van közelebb a valószínűség?

- 1%
- 10%
- 90%

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

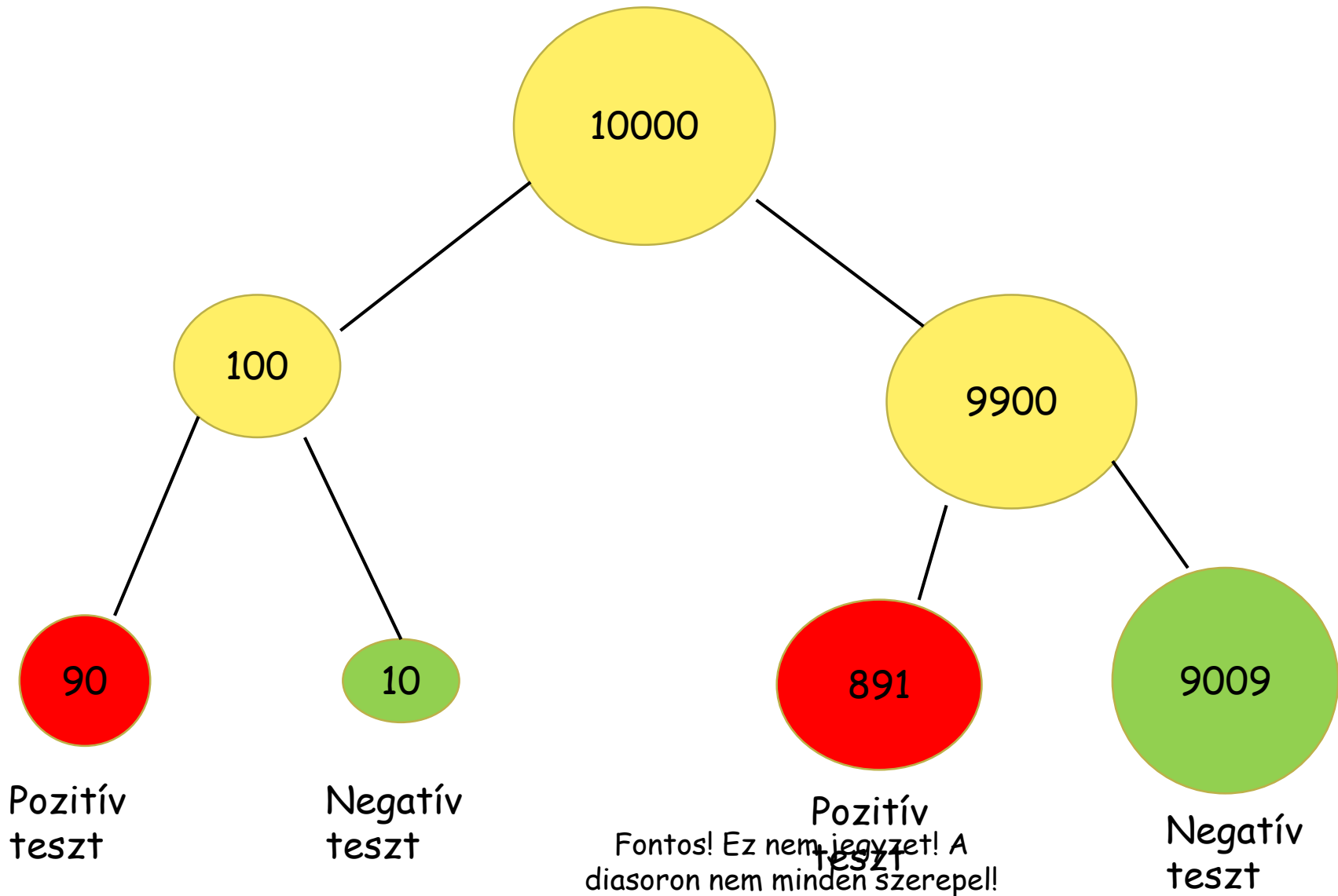
Megoldás

- Legyen A : emlődaganata van, B : pozitív a teszt. Ekkor

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \\ &= \frac{0,9 \cdot 0,01}{0,9 \cdot 0,01 + 0,09 \cdot 0,99} = 0,09174312 \end{aligned}$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Gyakoriságok



Teljes eseményrendszer

- Definíció: A_1, A_2, \dots teljes eseményrendszer alkotnak, ha

$$A_i A_j = \emptyset, i \neq j\text{-re és}$$

$$\bigcup_i A_i = \Omega$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Teljes valószínűség tétele

- Tegyük fel, hogy A_1, A_2, \dots ($0 < P(A_i)$) teljes eseményrendszer, ekkor

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

Bizonyítás:

$$B = \cup_i BA_i \implies P(B) = \sum_i P(BA_i) = \sum_i \frac{P(BA_i)}{P(A_i)} P(A_i)$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Szindbád és a háremhölgyek

- Szindbád a szultánnak tett szolgálataiért cserében 100 háremhölgy közül választhat. Azonban a háremhölgyeket nem egyszerre, hanem sorban egymás után mutatják be neki. Amennyiben egy bemutatott hölgyet nem választ ki azonnal, úgy már az örökké elveszik számára. Milyen stratégiát válasszon Szindbád, hogy a legszebb választásának minél nagyobb legyen a valószínűsége?



Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Stratégia

- Szindbád azt a stratégiát választja, hogy elengedi az első k hölgyet, és az utána következők közül az addigi legszebbet választja.
- Mennyi az optimális k ?

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Megoldás

- A_i : i – edik hölgyet választja Szindbád
($i = k + 1, k + 2, \dots, n = 100$).
- A_0 egyik hölgyet sem választja ki Szindbád
- $A_0, A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer
- B : a legszebbet választja ki

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Megoldás (folyt.)

- $P(B) = \sum_i P(BA_i)$
- $P(BA_0) = 0$
- $P(BA_i) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot k \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot (i-2) \cdot 1 \cdot i \cdot \dots \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{k}{(i-1)n}$
- $P(B) = \sum_{i=k+1}^n \frac{k}{(i-1)n} = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$
- Milyen k -ra lesz ez maximális?

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Megoldás (folyt.)

- k_n^* : az optimális érték
- $\frac{n}{k_n^*} \rightarrow e$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Bayes-formula általános alakja

- Tegyük fel, hogy $P(B) > 0, A_1, A_2, \dots$
($0 < P(A_i)$) teljes eseményrendszer, ekkor

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Bizonyítás:

$$P(A_k|B) = \frac{P(BA_k)}{P(B)} = \frac{\frac{P(BA_k)}{P(A_k)}P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepell!

Monty Hall-paradoxon

- Képzeljük el, hogy egy vetélkedőben szerepel, és három ajtó közül kell választania. Az egyik mögött kocsi van, a másik kettő mögött viszont kecske. Tegyük fel, hogy maga a 3. ajtót választja, mire a műsorvezető, aki tudja, melyik ajtó mögött mi van, kinyitja az 1. ajtót, megmutatván, hogy amögött kecske van. Ezután önhöz fordul, és megkérdezi: „Nem akarja esetleg mégis a 2. ajtót választani?” Vajon előnyére válik, ha vált?



Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Megoldás

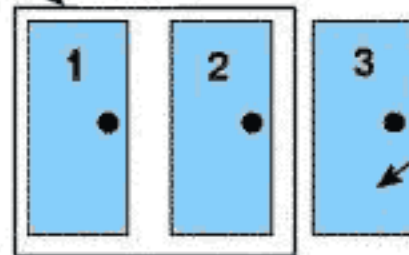
- A_i : i – edik ajtó mögött van a kocsi
- $P(A_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$
- B : műsorvezető az első ajtót nyitja ki
- Kérdés: $P(A_3|B) = ?$
- $P(A_3|B) =$

$$\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{11}{23}}{0\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}+\frac{11}{23}} = \frac{1}{3}$$

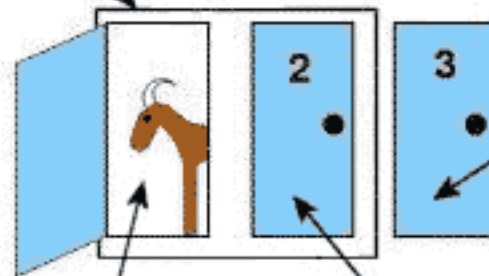
Fóntos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepell!

2/3 eséllyel itt a kocsi



1/3 eséllyel itt

2/3 eséllyel itt a kocsi



1/3 eséllyel itt

0 eséllyel itt, tehát 2/3 eséllyel itt

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Függetlenség

- Az egyik legfontosabb valószínűségszámítási fogalom.
- Definíció: A és B függetlenek, ha $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Ha $P(B) > 0$, akkor

A és B függetlenek $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

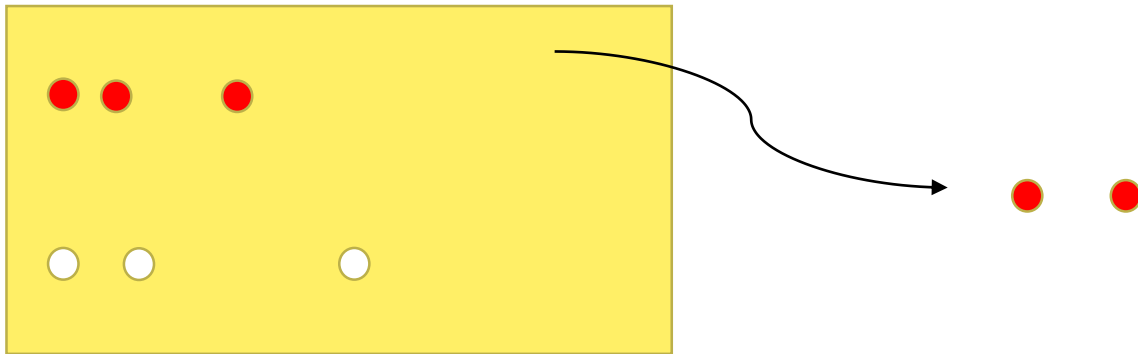
Bizonyítás:

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \xleftrightarrow{P(B)>0} P(AB) = P(A)P(B)$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban M piros és $N - M$ fehér golyó van. 2-szer húzunk.
- A : elsőre pirosat, B : másodikra pirosat húzunk. Függetlenek-e?



Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepell!

Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel (folyt.)

- $P(A) = P(B) = \frac{M}{N}$.

- **Visszatevésesnél:**

$$P(AB) = \frac{M^2}{N^2} = P(A)P(B).$$

- **Visszatevés nélkül:**

$$P(AB) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)} \neq P(A)P(B).$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

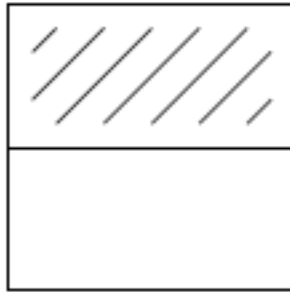
Több esemény függetlensége

- Definíció: A_1, A_2, \dots, A_n függetlenek, ha bárhogy választunk ki közülük k darabot ($2 \leq k \leq n$) úgy:

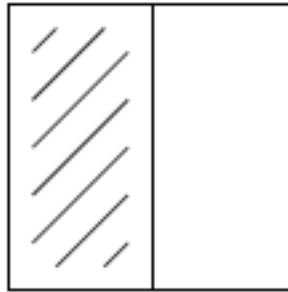
$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

- Nem elég sem a páronkénti függetlenség, sem az "n-es szorzat"!

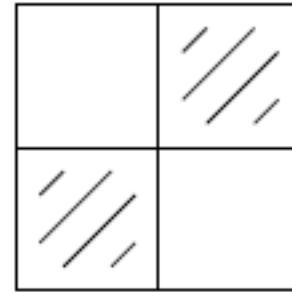
Páronkénti, de nem teljes függetlenség



A



B



C

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(ABC) = 0 \neq P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!

Jogos volt-e az ítélet?

- 1999-ben egy brit bíróság elítélte Sally Clarkot, mert 2 gyermeke is hirtelen csecsemőhalállal hunyt el.
- Az indok az volt, hogy a gyermekorvos szakértő szerint egy csecsemőnél $1/8500$ az esélye egy ilyen halálesetnek, ezért a bíróság szerint a 2 eset valószínűsége $\sim 1/73$ millió.
- Későbbi kutatások kimutatták, hogy az első haláleset után a második esetnek már $1/100$ az esélye (nem függetlenek).

Fontos! Ez nem jegyzet! A diasoron nem minden szerepel!