Valószínűségszámítás

3. előadás

Arató Miklós

2017.09.25.

Tartalomjegyzék

2 esemény függetlensége

Definíció: A és B **függetlenek**, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Megjegyzések

a) Ha $P(A) = 0$, akkor A minden más eseménytől független.
b) Ha $P(B) > 0$, akkor A és B pontosan akkor függetlenek, ha $P(A|B) = P(A)$.
c) Az egymást kizáró események nem függetlenek, azaz $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, $P(AB) = 0$ esetén A és B nem független.

Több esemény függetlensége

Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események **függetlenek**, ha $P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$ minden $k \leq n$-re és $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$-re.

Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots$ események **függetlenek**, ha minden n-re $A_1, \ldots, A_n$ függetlenek.

Tönkremenési feladat

Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot. A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri. Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van. Mekkora valószínűséggel megy tönkre Péter?
Legyen $k = 10$ és $n = 26$. Ekkor $n - k = 16$.

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.
B_1 : az első lépésben Péter nyer,
B_2 : az első lépésben Gábor nyer.
Ekkor
$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = p(k+1) \cdot \frac{1}{2} + p(k-1) \cdot \frac{1}{2}$,
ahol $1 \leq k \leq n-1$.
$\Rightarrow 2 \cdot p(k) = p(k+1) + p(k-1)$
$\Rightarrow p(k+1) - p(k) = p(k) - p(k-1) = d$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d.$

$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}.$

$p(k) = 1 - \frac{k}{n}, 1 - p(k) = \frac{k}{n}$

$k = 10, n = 26 \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{10}{26} = \frac{8}{13}.$

Feladat

Egy számegyenesen lépegetünk az egészeken 0-ból kiindulva, minden lépésben ugyanakkora eséllyel lépünk balra, mint jobbra. Kérdés: mekkora valószínűséggel térünk vissza a 0-ba? (ezt az eseményt jelöljük C-vel)

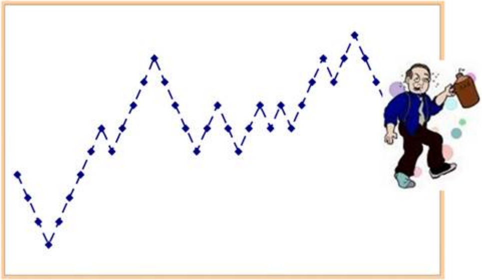

Figure: Bolyongás a számegyenesen

Megoldás

Legyen D_1, hogy az első lépésben jobbra, ill. D_2, hogy az első lépésben balra megyünk.
$P(C) = P(C|D_1) \cdot \frac{1}{2} + P(C|D_2) \cdot \frac{1}{2}$
$P(C|D_1)$: annak valószínűsége, hogy 1-ből eljutunk 0-ba
$P(C|D_1) \geq P(\text{1-ből előbb jutunk el 0-ba, mint } n\text{-be}) = 1 - \frac{1}{n}$
minden n-re $\Rightarrow$
$P(C|D_1) \geq 1 - \frac{1}{n}$ minden n-re $\Rightarrow$
$P(C|D_1) = 1$, ugyanígy $P(C|D_2) = 1$, azaz $P(C) = 1$.
Megjegyzés: 2 dimenzióban még ugyanennyi, de 3 dimenzióban már 1-nél kisebb ez a valószínűség.

Definíció

Definíció: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.

Definíció: A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan x_i valós számok és A_i teljes eseményrendszer, hogy $\xi = \sum_k x_k \cdot \chi_{A_k}$.

Indikátor és binomiális

Az $A \in \mathcal{A}$ esemény **indikátor valószínűségi változója**

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1 & : \quad w \in A \\ 0 & : \quad w \notin A \end{cases} .$$

Binomiális eloszlás: Vegyünk n független kísérletet, ahol egy kísérlet p valószínűséggel sikeres, és ξ jelölje a sikeres kísérletek számát $(0 \le k \le n)$.

$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Jelölés: $B(n, p)$.

Példa: 6-osok száma 40 kockadobásból.

Geometriai

Geometriai (Pascal-)eloszlás: Független kísérleteket végzünk, amelyek p valószínűséggel sikeresek, η az első sikeres kísérlet sorszáma $(k = 1, 2, \ldots)$.

$P(\eta = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$

Példa: Kockadobásoknál első 6-os dobás sorszáma.

Állítás: A Pascal-eloszlás **örökifjú tulajdonságú**, azaz $P(\xi > k + l \mid \xi > k) = P(\xi > l)$.

Bizonyítás: $P(\xi > k + l \mid \xi > k) = \frac{P(\xi>k+l \ \wedge \ \xi>k)}{P(\xi>k)} = \frac{P(\xi>k+l)}{P(\xi>k)} = \frac{(1-p)^{k+l}}{(1-p)^k} = (1 - p)^l = P(\xi > l)$.

Hipergeometrikus

Hipergeometriai eloszlás: Adott egy dobozban M piros és $N-M$ fehér golyó, ezekből húzunk véletlenszerűen n darabot. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát (visszatevés nélkül), és legyen $k=0,1,\ldots,\min(M,n)$.

$P(\xi=k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Poisson

Poisson-eloszlás: Legyen $0 < \lambda$ fix paraméter, továbbá $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$P(\eta = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1.$$

Negatív binomiális

Negatív binomiális eloszlás: Független kísérleteket végzünk, amelyek p valószínűséggel sikeresek.
ξ az r-edik sikeres kísérlet sorszáma (ahol r rögzített).
$P(\xi = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot (1-p)^{k-r} \cdot p^r$, ahol $k = r, r+1, \ldots$.
Megjegyzés: $r = 1$-re pont a Pascal-eloszlást kapjuk.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye**
$F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.
$\lim_{y \downarrow x} F_\xi(y) - F(x) = P(\xi = x)$
Diszkrét esetben $P(\xi = x_k) = F_\xi(x_{k+1}) - F_\xi(x_k)$

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Állítás: Az F_ξ eloszlásfüggvényre teljesülnek az alábbiak:

1) F_ξ monoton növő.
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$ és $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
3) F_ξ balról folytonos és jobbról létezik a határértéke minden $x \in \mathbb{R}$ helyen.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, ha $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ minden $x \in \mathbb{R}$, ahol f véges sok ponttól eltekintve folytonos

f: sűrűségfüggvény

$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, ds = 1, f(x) \geq 0$

$F'(x) = f(x)$ véges sok pontot kivéve

Egyenletes eloszlás intervallumon

Tekintsünk $[a, b]$-n geometriai valószínűségi mezőt.
$\xi(w) = w$.

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & : \quad a < x < b \\ 1 & : \quad b \leq x \end{cases} .$$

Az ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük az $[a, b]$ intervallumon.
Jelölés: $E(a, b)$ vagy $U(a, b)$.

Sűrűségfüggvény: $f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & : \quad x \in [a, b] \end{cases}$.

λ-exponenciális eloszlás

τ: egy izzó élettartama
örökifjú tulajdonság: $P(\tau > t + s \mid \tau > s) = P(\tau > t)$, ahol $t, s > 0$
$G(t) = P(\tau > t)$, így $\frac{G(t+s)}{G(s)} = \frac{P(\tau>t+s\ ,\ \tau>s)}{P(\tau>s)} = G(t)$, azaz
$G(t + s) = G(t) \cdot G(s) \Rightarrow$.
$G(t) = e^{-\lambda t}$ alakú. Mivel $G(t)$ valószínűség, ezért $\lambda > 0$.
Az eloszlásfüggvény balról folytonossága miatt

$$P(\tau < t) \geq \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) \geq \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau < t - \varepsilon) = P(\tau < t) \Rightarrow$$

$$P(\tau < t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (1 - e^{-\lambda(t-\varepsilon)}) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

λ-exponenciális eloszlás (folyt.)

λ-exponenciális eloszlású:

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & : \quad 0 < t \end{cases}$$

sűrűségfüggvény: $f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & : \quad 0 < t \end{cases}$.

Könnyen látható a fordított irány is, tehát, hogy egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó örökifjú eloszlású.

Gamma-eloszlás

$\xi \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$ eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \leq 0 \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} & : \ 0 < x \end{cases},$$

ahol $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \, dx$.

(Megj.: $\Gamma(n) = (n-1)!$.)

Standard normális eloszlás

A ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \; (x \in \mathbb{R}).$

$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds =$

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} \, dt \, ds \overset{(\varphi, r)}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \, dr =$

$2\pi \cdot \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} = 2\pi \Rightarrow . \; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = 1$

eloszlásfüggvény: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.$

Jelölése: $N(0, 1)$.

Normális eloszlás

ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású $\Rightarrow \eta = m + \sigma\xi$ normális eloszlású.
Eloszlásfüggvénye:
$P(m + \sigma\xi < x) = P(\xi < \frac{x-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$.
A sűrűségfüggvény: $f_{m+\sigma\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.
Ez a normális eloszlás m és σ^2 paraméterekkel, jelölése: $N(m, \sigma^2)$.
Fordítva, ha $\eta \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\frac{\eta-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Haranggörbe

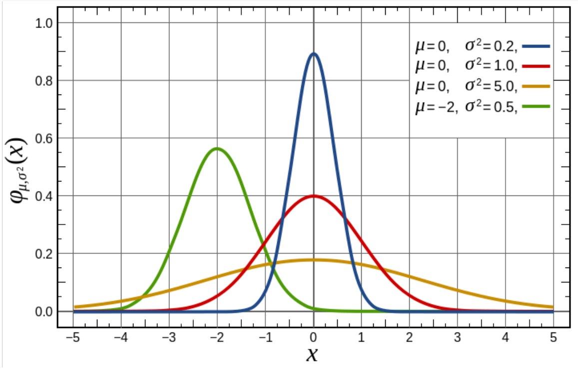

Figure: Normális sűrűségfüggvények

Táblázat

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981