

# Valószínűségszámítás

## 6. előadás

Arató Miklós

2017.10.16.

# Tartalomjegyzék

- 1 Emlékeztető
- 2 Nagy számok törvénye
- 3 Konvergenciák
- 4 Nagy számok erős törvénye

# Szórásnégyzet

**Definíció:**  $D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2$  a  $\xi$  valószínűségi változó **szórásnégyzete**, ha az  $E\xi$  létezik és véges.

**Definíció:**  $\xi$  **szórása** a szórásnégyzet négyzetgyöke, azaz  $D\xi = \sqrt{D^2\xi}$ .

## Kovariancia és korreláció

**Definíció:**  $\xi$  és  $\eta$  valószínűségi változók **kovarianciája**

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E\{(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\},$$

**korrelációja**  $R(\xi, \eta) = \text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{D\xi \cdot D\eta}.$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta.$$

## Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség

**Tétel** [Markov-egyenlőtlenség]: Legyen  $\xi$  nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik az  $E\xi$  várható értéke, továbbá legyen  $c$  pozitív szám. Ekkor  $P(\xi \geq c) \leq \frac{E\xi}{c}$ .

**Tétel** [Csebisev-egyenlőtlenség]: Ha  $\xi$  szórásnégyzete véges, azaz  $D^2\xi < \infty$ , valamint  $0 \leq \lambda$ , akkor teljesül a  $P(|\xi - E\xi| \geq \lambda) \leq \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$  egyenlőtlenség.

# Törvény

**Tétel** [A nagy számok gyenge törvénye]: Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$  páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók,  $D^2\xi_i < \infty$  és  $E\xi_i = m$ . Ekkor minden  $0 < \varepsilon$ -ra

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

**Biz.:** Tudjuk, hogy  $E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = n \cdot m$ . Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenséget felhasználva

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot D^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n D^2\xi_i}{\varepsilon^2} =$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{D^2\xi_1}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

## Példa

Tekintsünk független kísérleteket, minden kísérlet legyen  $p$  valószínűséggel sikeres.

Jelölje  $\eta_n$  a sikeres kísérletek számát az első  $n$  kísérletben.

Ekkor  $P(|\frac{\eta_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

Legyen ugyanis  $\eta_n = X_1 + \dots + X_n$ , ahol  $X_i = 1$ , ha az  $i$ -edik kísérlet sikeres, különben pedig 0.

Továbbá  $EX_i = p$  és  $D^2X_i = p(1 - p)$ . Így  $X_i$ -kre teljesülnek az előbbi tétel feltételei, tehát a relatív gyakoriság tart  $p$ -hez.

# Sztochasztikus konvergencia

**Definíció:** A  $\xi_n$  valószínűségi változó-sorozat **sztochasztikusan tart**  $\xi$ -hez, ha minden  $0 < \varepsilon$ -ra  $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  esetén. Jelölése:  $\xi_n \Rightarrow \xi$  (vagy  $\xi_n \xrightarrow{st.} \xi$ ).

**Állítás:** Ha  $\xi_n \Rightarrow \xi$ , akkor  $P(\xi_n < x) \rightarrow P(\xi < x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ), ez utóbbi minden folytonossági pontjában.



# Konvergenciák

## Definíció:

$\xi_n \rightarrow \xi$  **eloszlásban**, ha  $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(x)$  az utóbbi minden folytonossági pontjában.

$\xi_n \rightarrow \xi$  **majdnem mindenütt**, ha  $P(w : \xi_n(w) \rightarrow \xi(w)) = 1$ . [1 valószínűségű konvergencia].

$\xi_n \rightarrow \xi$   **$L^p$ -ben**, ha  $E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Állítás:** Ha  $\xi_n \rightarrow \xi$   $L^p$ -ben, akkor  $\xi_n \Rightarrow \xi$

**Állítás:** Ha  $\xi_n \rightarrow \xi$  1 valószínűséggel, akkor  $\xi_n \Rightarrow \xi$

## Példa

$\xi_n$  tart  $\xi$ -hez majdnem mindenütt, de  $L^p$ -ben nem  
 $\Omega := [0, 1]$  geometriai valószínűségi mező

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} e^n & : \omega \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & : \omega \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases} .$$

Ekkor  $\xi_n \rightarrow 0$  majdnem mindenütt, viszont

$$E|\xi_n|^p = \frac{1}{n} e^{np} + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 0 = \frac{e^{np}}{n} \not\rightarrow 0.$$

## Tétel

**Állítás:**  $\xi_n \rightarrow \xi$  majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha  
 $\lim_{m \rightarrow \infty} P(\sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$  minden pozitív  $\varepsilon$ -ra.

**Következmény:**  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$  minden  $0 < \varepsilon \Rightarrow$   
 $\xi_n \rightarrow \xi$  1 valószínűséggel.

**Nagy számok Cantelli-féle erős törvénye:**  $\xi_1, \xi_2, \dots$  független,  
azonos eloszlású valószínűségi változók és  $E|\xi_n - E\xi_n|^4$  véges.

Ekkor  $\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \rightarrow E\xi_1$  1 valószínűséggel.

## Példa 1.

0,25-paraméterű indikátor és  $N(0,25,1)$  változók átlaga

**Definíció:** Az  $X$  valószínűségi változó  $(\alpha, \beta)$  paraméterű Pareto-eloszlású, ha eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha & x > 0. \end{cases}$$

(1,5)-Pareto változók átlaga

## Példa 2.

"A számok rendesek" (Borel):  $\Omega = [0, 1]$ ,  $w = 0, w_1 w_2 \dots$  2-es diadikus tört és  $\xi_n(w) = w_n$  ( $n$ -edik számjegy)

$$\left\{ w : \xi_1(w) = x_1, \dots, \xi_n(w) = x_n \right\} = \\ \left\{ w : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} \leq w < \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right\} \Rightarrow$$

$$P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \frac{1}{2^n} \Rightarrow P(\xi_i = x_i) = \frac{1}{2}$$

$x_i = 0, 1$  és  $\xi$ -k függetlenek.  $\Rightarrow$

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \rightarrow E\xi_1 = \frac{1}{2} \text{ 1 valószínűséggel}$$

## Példa 3.

**Monte-Carlo módszer:**  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  folytonos.

Kérdés:  $\int_0^1 f(x) dx$  becsülhető-e véletlen számgenerálás segítségével?

$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$  független  $E(0, 1)$ -eloszlásúak

$$\varrho_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } f(\xi_i) > \eta_i \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

Belátható, hogy  $E\varrho_i = P(f(\xi_i) > \eta_i) = \int_0^1 f(x) dx$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \varrho_i}{n} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

## Példa 4.

A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér,  $n$  év múlva az értékét jelöljük  $X_n$ -el. Mihez tart  $X_n$ ?

## Példa 4.

A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér,  $n$  év múlva az értékét jelöljük  $X_n$ -el. Mihez tart  $X_n$ ?

A részvény várható éves hozama 20%.

$Y_n$ : hányszorosára változik a részvény árfolyama az  $n$ -edik évben  $\Rightarrow$   
 $X_n = Y_1 \dots Y_n$  és  $EX_n = EY_1 \dots EY_n = 1,2^n \Rightarrow EX_n \rightarrow +\infty$   
Egy tipikus HUNCUT részvényárváltozás



## Példa folytatása

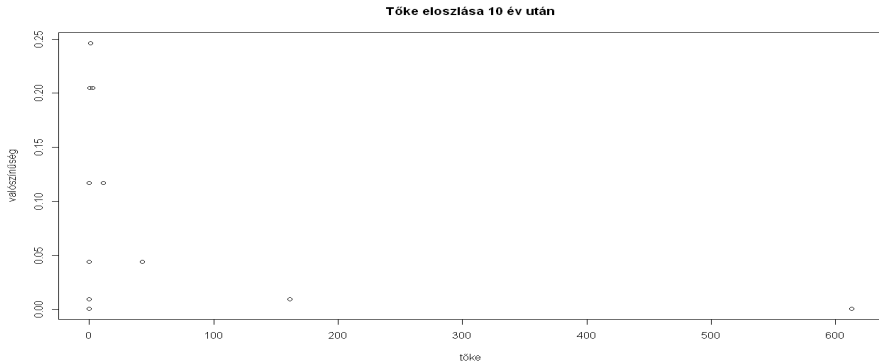


Figure: A HUNCUT részvény eloszlása

## Példa folytatása

$$X_n = \exp \{ \ln Y_1 + \cdots + \ln Y_n \}.$$

Nagy számok erős törvénye  $\Rightarrow$

$$\frac{\ln Y_1 + \cdots + \ln Y_n}{n} \rightarrow E(\ln Y_1) = \frac{1}{2} \ln(0,95) < 0 \quad (1 \text{ valószínűséggel}).$$

$$\Rightarrow X_n = \left( \exp \left\{ \frac{\ln Y_1 + \cdots + \ln Y_n}{n} \right\} \right)^n \rightarrow 0 \quad (1 \text{ valószínűséggel}).$$

## Előző példa folytatása

Minden év végén tőként felét a HUNCUT részvénybe fektetjük, a másik felét azonban párnánk alatt készpénzben tartjuk.

$Z_n$ : tőkénk  $n$  év múlveli értéke. Tőkénk várható éves hozama  $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 190\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 50\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%) - 100\% = 10\%$ .

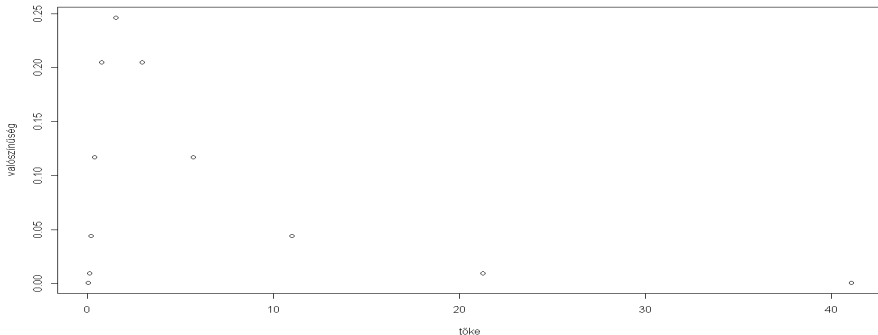
$U_n$ : hányszorosára változik a részvény árfolyama az  $n$ -edik évben.

$Z_n = U_1 \dots U_n$  és  $EZ_n = EU_1 \dots EU_n = 1, 1^n \rightarrow +\infty$

Tőkeváltozás új stratégiával

## Példa folytatása

Tőke eloszlása 10 év után (óvatosabb befektetési politikával)



**Figure:** Tőkénk eloszlása, ha mindig csak a felét fektetjük be a HUNCUT részvénybe

## Példa folytatása

$$Z_n = \exp \{ \ln U_1 + \cdots + \ln U_n \}.$$

$\frac{\ln U_1 + \cdots + \ln U_n}{n} \rightarrow E(\ln U_1) = \frac{1}{2} \ln(1,45 \cdot 0,75) > 0$  (1 valószínűséggel).  $\Rightarrow$

$$Z_n = \exp \left( \frac{\ln U_1 + \cdots + \ln U_n}{n} \right)^n \rightarrow +\infty \text{ (1 valószínűséggel)}$$