Valószínűségszámítás és Statisztika

7. előadás

Arató Miklós

2017.10.16.

Tétel [Centrális határeloszlástétel független, azonos eloszlású változókra]: Legyenek
$\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlásúak, $m := E\xi_1$ és
$0 < \sigma^2 = D^2\xi_i < \infty$. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - n \cdot m}{\sigma \cdot \sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Példa 1.

Egy párt szavazótáborát szeretnénk megbecsülni úgy, hogy legalább $0,95$ valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk.
Jelölje N az összes ember, M a kérdéses pártra szavazók, n pedig a megkérdezettek számát, ekkor $p := \frac{M}{N}$-et akarjuk jól közelíteni.
Legyen továbbá x_i értéke 1, ha az i-edik megkérdezett az adott pártra szavaz és 0 különben.
Ekkor a

$$P\left(\left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - \frac{M}{N}\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

Példa 1. (folyt.)

A centrális határeloszlástétel szerint

$$P\left(\frac{-\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \sim$$

$$\sim \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 \geq 0,95$$

azaz $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq 0,975 = \Phi(1,96)$, tehát legyen $\frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \geq 1,96$. Ezzel $\sqrt{n} \geq 1,96\cdot\frac{1}{0,01}\cdot\sqrt{p(1-p)}$, ha [1] $n \geq 10000$, tehát ha normális közelítéssel dolgozunk, kb. 10 000 embert kell megkérdezni.

[1] mivel a $\sqrt{p(1-p)}$ nem lehet nagyobb $0,5$-nél, így a jobb oldal felülről becsülhető 98-cal

Példa 2.

Mihez tart a következő: $e^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!}\xrightarrow{n\to\infty}$? Ha végtelenig összegeznénk, nyilván 1 lenne az összeg, de most $n-1$-ig megyünk! Legyenek $\eta_i \sim$ 1-Poisson függetlenek, ezekre teljesülnek a centrális határeloszlástétel feltételei, azaz felírható:

$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i - n\cdot 1}{1\cdot\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x)$, ahol $\sum_{i=1}^{n}\eta_i \sim n$-Poisson, így

$P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i < n\right) = e^{-n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!}$. Ekkor speciálisan $x = 0$-ra

$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i - n}{\sqrt{n}} < 0\right) \to \Phi(0) = \frac{1}{2}$. Tehát a keresett összeg $\frac{1}{2}$-hez tart.