

Valószínűségszámítás és Statisztika vizsgázárthelyi 2017. január 10.

Az I. és II. rész kérdéseinek mindegyikénél pontosan 1 válasz helyes. A válaszokat írja a kérdések utáni táblázatba! **A szövegben bekarikázott válaszokat nem fogjuk elfogadni!**

I. rész (helyes válaszok: +2 pont, helytelen: -1 pont)

1. X_1, X_2, \dots független, 2 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

a) Mennyi $X_1 + 3X_2 - 4$ várható értéke?

A: 4	B: -2	C: 6	D: 8	E: 11	F: egyéb
------	-------	------	------	-------	----------

b) Milyen értéket vesz fel $X_1 + X_2$ eloszlásfüggvénye a 0 helyen?

A: 1	B: $2e^{-2}$	C: 0	D: $0.5e^{-0.5}$	E: $4e^{-4}$	F: egyéb
------	--------------	------	------------------	--------------	----------

c) Mihez fog tartani sztochasztikusan $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$?

A: 1-hez	B: 0,5-hez	C: 0-hoz	D: 2-höz	E: semmihez	F: egyébhez
----------	------------	----------	----------	-------------	-------------

d) Mihez fog tartani $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n < 2n)$?

A: 1-hez	B: 0,5-hez	C: 0-hoz	D: 2-höz	E: semmihez	F: egyébhez
----------	------------	----------	----------	-------------	-------------

e) Mennyi a $P(X_1 > 301 | X_1 > 300)$ valószínűség?

A: 1	B: e^{-2}	C: 0	D: e^{-301}	E: $1 - e^{-2}$	F: egyéb
------	-------------	------	---------------	-----------------	----------

2. Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot. A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri. Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van. Mekkora valószínűséggel megy tönkre Péter?

A: 0,5	B: 1	C: 0	D: 16/26	E: 10/26	F: egyéb
--------	------	------	----------	----------	----------

3. X 4 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

a) Mennyi X és $(-3X+5)$ korrelációja?

A: 1	B: -1	C: 36	D: $1 - \exp(-4)$	E: 1/12	F: egyéb
------	-------	-------	-------------------	---------	----------

b) Mennyi a $P(X > 1)$ valószínűség?

A: 1	B: $1 - 5e^{-4}$	C: 0	D: $5e^{-4}$	E: $1 - 6e^{-5}$	F: egyéb
------	------------------	------	--------------	------------------	----------

4. Az X valószínűségi változó $N(3, 2^2)$ eloszlású.

a) Milyen eloszlású $(3X-2)$?

A: $N(7, 6^2)$	B: $N(7, 12)$	C: $N(9, 6^2)$	D: ká-négyzet	E: exponenciális	F: egyéb
----------------	---------------	----------------	---------------	------------------	----------

b) Mennyi a $P(X > 1)$ valószínűség?

A: 1	B: 0	C: $\Phi(1)$	D: $\Phi(-1)$	E: $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$	F: egyéb
------	------	--------------	---------------	---	----------

II. rész

5. Egy kísérletsorozatnál megfigyeléseink a következők: 2, 1, 1, 0. (a válaszoknál 2 tizedesjegyre kerekítettünk)

a) Mennyi a minta tapasztalati mediánja? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 0,25	C: 0	D: 2	E: 0,5	F: egyéb
------	---------	------	------	--------	----------

b) Milyen értéket vesz fel a tapasztalati eloszlásfüggvény a 3 helyen? (helyes válasz: +2 pont,

helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 0,75	C: 0	D: 1,4	E: 0,25	F: egyéb
------	---------	------	--------	---------	----------

c) Mennyi a minta tapasztalati módusza? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 0,25	C: 0	D: 2	E: 0,5	F: egyéb
------	---------	------	------	--------	----------

d) Feltételezzük, hogy megfigyeléseink azonos eloszlású Poissonok? Mennyi a Poisson paraméter momentum módszer szerinti becslése? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 0,25	C: 0	D: 2	E: 0,5	F: egyéb
------	---------	------	------	--------	----------

6. Az informatikus hallgatók 2016-ban hetente átlagosan 1 liter tejet (átlagosan 200 Ft-ért), 2 liter bort (literenként 400 Ft-ért) és 10 korsó sört (korsónként 500 Ft-ért) ittak meg. 2017-re ezek az átlagos értékek a következők szerint változtak meg 1 liter tej (200 Ft/liter), 3 liter bor (500 Ft/liter) és 20 korsó sör (600 Ft/korsó). Határozza meg az ital fogyasztás 2016 és 2017 közötti Laspeyres-féle árindexét! (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: 120	B: 190	C: 120,18	D: 190,28	E: 110	F: egyéb
--------	--------	-----------	-----------	--------	----------

7. Janci és Juliska nullhipotézise az, hogy egy kétórás erdei sétán 4 paraméterű Poisson eloszlású számú boszorkánnyal találkozhatnak. Az ellenhipotézis az, hogy a Poisson paraméter 4-nél kisebb. A hipotézisről egyetlen 2 órás séta alapján akarnak dönteni. Amennyiben legalább 1 boszorkánnyal találkoznak, úgy elfogadják a nullhipotézist. Mekkora a másodikfajú hiba valószínűsége, ha a Poisson paraméter 3? (helyes válasz: +3 pont, helytelen: -2 pont)

A: $1 - e^{-3}$	B: e^{-3}	C: e^{-4}	D: $1 - e^{-4}$	E: $1 - e^{-2}$	F: egyéb
-----------------	-------------	-------------	-----------------	-----------------	----------

8. A Valószínűség számítás és statisztika tárgy oktatójának az a nullhipotézise, hogy egy vizsgán 0,1 annak a valószínűsége, hogy egy diák megbukik (a diákok egymástól függetlenül buknak meg). 200 vizsgázóból 40-en buktak meg. Nullhipotézisünk ellenőrzésére χ^2 próbát alkalmazunk. Az alábbi állítások közül pontosan egy igaz. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	B: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.	C: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.
D: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	E: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	F: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.

NÉV:

Kérdés	1/a	1/b	1/c	1/d	1/e	2.	3/a	3/b	4/a	4/b	5/a	5/b	5/c	5/d	6.	7.	8.
Válasz	A	C	D	B	F	D	B	B	A	C	A	A	A	A	A	A	B

III. rész A következő kérdéseket a kiadott lapokon dolgozza ki! Minden lapra írja rá nevét!

- Definiálja a következő fogalmakat: elsőfajú hiba, mintatér, hatásos becslés! /6 pont/
- Bizonyítsa be, hogy a szimmetrikus bolyongás visszatérési idejének végtelen a várható értéke! /8 pont/
- A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. Egy részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n -el. Bizonyítsa be, hogy X_n 1 valószínűséggel 0-hoz tart, miközben várható értéke végtelenhez konvergál! /8 pont/
- Vezesse le a Poisson eloszlású minta paraméterének maximum likelihood becslését! /6 pont/

Osztályzás: I. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen, II. rész pontszáma legfeljebb 3 pont: elégtelen, III. rész pontszáma legfeljebb 5 pont: jegy legfeljebb elégséges, Összpontszám legfeljebb 17 pont: elégtelen, Összpontszám legalább 38 pont: jeles
Táblázatok

A χ^2 -próba kritikus értékei

f	0,1	0,05	0,01
1	2,71	3,84	6,63
2	4,61	5,99	9,21
3	6,25	7,81	11,3
4	7,78	9,49	13,3
5	9,24	11,1	15,1
6	10,6	12,6	16,8
7	12,0	14,1	18,5
8	13,4	15,5	20,1
9	14,7	16,9	21,7
10	16,0	18,3	23,2
11	17,3	19,7	24,7
12	18,5	21,0	26,2
13	19,8	22,4	27,9
14	21,1	23,7	29,1
15	22,3	25,0	30,6

f	0,1	0,05	0,01
16	23,5	26,3	32,0
17	24,8	27,6	33,4
18	26,0	28,9	34,8
19	27,2	30,1	36,2
20	28,4	31,4	37,6
21	29,6	32,7	38,9
22	30,8	33,9	40,3
23	32,0	35,2	41,6
24	33,2	36,4	43,0
25	34,4	37,7	44,3
26	35,6	38,9	45,6
27	36,7	40,1	47,0
28	37,9	41,3	48,3
29	39,1	42,6	49,6
30	40,3	43,8	50,9

Az eloszlás szabadságfoka f , az oszlopok felett a próba terjedelmét adtuk meg.

Ha $f > 30$, akkor normális közelítést alkalmazhatunk: a $(T - f)/\sqrt{f}$ statisztikára vonatkozó kritikus értékek:

0,1	0,05	0,01
2,22	2,85	4,03

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,20	0,9993
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,40	0,9996
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,60	0,9998
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,80	0,9999
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861		
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8079	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Valószínűségszámítás és Statisztika vizsgázárthelyi 2017. január 10.

Az I. és II. rész kérdéseinek mindegyikénél pontosan 1 válasz helyes. A válaszokat írja a kérdések utáni táblázatba! **A szövegben bekarikázott válaszokat nem fogjuk elfogadni!**

I. rész (helyes válaszok: +2 pont, helytelen: -1 pont)

1. X_1, X_2, \dots független, 2 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

a) Mennyi $X_1 + 4X_2 - 3$ várható értéke?

A: 4	B: -2	C: 7	D: 8	E: 11	F: egyéb
------	-------	------	------	-------	----------

b) Milyen értéket vesz fel $X_1 + X_2$ eloszlásfüggvénye a 0 helyen?

A: 1	B: $2e^{-2}$	C: $0.5e^{-0.5}$	D: 0	E: $4e^{-4}$	F: egyéb
------	--------------	------------------	------	--------------	----------

c) Mihez fog tartani sztochasztikusan $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$?

A: 1-hez	B: 0,5-hez	C: 2-höz	D: 0-hoz	E: semmihez	F: egyébhez
----------	------------	----------	----------	-------------	-------------

d) Mihez fog tartani $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n < 2n)$?

A: 1-hez	B: 2-höz	C: 0-hoz	D: 0,5-hez	E: semmihez	F: egyébhez
----------	----------	----------	------------	-------------	-------------

e) Mennyi a $P(X_1 > 301 | X_1 > 300)$ valószínűség?

A: 1	B: 0	C: e^{-2}	D: e^{-301}	E: $1 - e^{-2}$	F: egyéb
------	------	-------------	---------------	-----------------	----------

2. Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot. A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri. Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van. Mekkora valószínűséggel megy tönkre Gábor?

A: 0,5	B: 1	C: 0	D: 16/26	E: 10/26	F: egyéb
--------	------	------	----------	----------	----------

3. X 5 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

a) Mennyi X és $(-3X+5)$ korrelációja?

A: -1	B: 1	C: 36	D: $1 - \exp(-4)$	E: 1/12	F: egyéb
-------	------	-------	-------------------	---------	----------

b) Mennyi a $P(X > 1)$ valószínűség?

A: 1	B: $1 - 5e^{-4}$	C: 0	D: $6e^{-5}$	E: $1 - 6e^{-5}$	F: egyéb
------	------------------	------	--------------	------------------	----------

4. Az X valószínűségi változó $N(4, 2^2)$ eloszlású.

a) Milyen eloszlású $(3X-4)$?

A: $N(7, 6^2)$	B: $N(7, 12)$	C: $N(8, 6^2)$	D: ká-négyzet	E: exponenciális	F: egyéb
----------------	---------------	----------------	---------------	------------------	----------

b) Mennyi a $P(X > 0)$ valószínűség?

A: 1	B: 0	C: $\Phi(-2)$	D: $\Phi(2)$	E: $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$	F: egyéb
------	------	---------------	--------------	---	----------

II. rész

5. Egy kísérletsorozatnál megfigyeléseink a következők: 2, 2, 1, 0. (a válaszoknál 2 tizedesjegyre kerekítettünk)

a) Mennyi a minta tapasztalati mediánja? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 1,5	C: 0	D: 2	E: 1,25	F: egyéb
------	--------	------	------	---------	----------

b) Milyen értéket vesz fel a tapasztalati eloszlásfüggvény a 3 helyen? (helyes válasz: +2 pont,

helytelen: -1 pont)

A: 0	B: 0,75	C: 1	D: 1,4	E: 0,25	F: egyéb
------	---------	------	--------	---------	----------

c) Mennyi a minta tapasztalati módusza? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 0,25	C: 0	D: 2	E: 0,5	F: egyéb
------	---------	------	------	--------	----------

d) Feltételezzük, hogy megfigyeléseink azonos eloszlású Poissonok? Mennyi a Poisson paraméter momentum módszer szerinti becslése? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 0,25	C: 0	D: 2	E: 1,25	F: egyéb
------	---------	------	------	---------	----------

6. Az informatikus hallgatók 2016-ban hetente átlagosan 1 liter tejet (átlagosan 200 Ft-ért), 2 liter bort (literenként 400 Ft-ért) és 10 korsó sör (korsónként 500 Ft-ért) ittak meg. 2017-re ezek az átlagos értékek a következők szerint változtak meg 1 liter tej (200 Ft/liter), 3 liter bor (500 Ft/liter) és 20 korsó sör (600 Ft/korsó). Határozza meg az ital fogyasztás 2016 és 2017 közötti Laspeyres-féle mennyiségi indexét! (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: 120	B: 190	C: 120,18	D: 190,28	E: 110	F: egyéb
--------	--------	-----------	-----------	--------	----------

7. Jancsi és Juliska nullhipotézise az, hogy egy négyórás erdei sétán 3 paraméterű Poisson eloszlású számú boszorkánnyal találkozhatnak. Az ellenhipotézis az, hogy a Poisson paraméter 3-nál kisebb. A hipotézisről egyetlen 4 órás séta alapján akarnak dönteni. Amennyiben legalább 1 boszorkánnyal találkoznak, úgy elfogadják a nullhipotézist. Mekkora a másodikfajú hiba valószínűsége, ha a Poisson paraméter 2? (helyes válasz: +3 pont, helytelen: -2 pont)

A: $1 - e^{-3}$	B: e^{-3}	C: e^{-2}	D: $1 - e^{-4}$	E: $1 - e^{-2}$	F: egyéb
-----------------	-------------	-------------	-----------------	-----------------	----------

8. A Valószínűség számítás és statisztika tárgy oktatójának az a nullhipotézise, hogy egy vizsgán 0,1 annak a valószínűsége, hogy egy diák megbukik (a diákok egymástól függetlenül buknak meg). 200 vizsgázóból 40-en buktak meg. Nullhipotézisünk ellenőrzésére χ^2 próbát alkalmazunk. Az alábbi állítások közül pontosan egy igaz. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.	B: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	C: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.
D: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	E: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	F: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.

NÉV:

Kérdés	1/a	1/b	1/c	1/d	1/e	2.	3/a	3/b	4/a	4/b	5/a	5/b	5/c	5/d	6.	7.	8.
Válasz	C	D	C	D	F	E	A	E	C	D	B	C	D	E	B	E	A

III. rész A következő kérdéseket a kiadott lapokon dolgozza ki! Minden lapra írja rá nevét!

- Definiálja a következő fogalmakat: elsőfajú hiba, mintatér, hatásos becslés! /6 pont/
- Bizonyítsa be, hogy a szimmetrikus bolyongás visszatérési idejének végtelen a várható értéke! /8 pont/
- A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. Egy részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n -el. Bizonyítsa be, hogy X_n 1 valószínűséggel 0-hoz tart, miközben várható értéke végtelenhez konvergál! /8 pont/
- Vezesse le a Poisson eloszlású minta paraméterének maximum likelihood becslését! /6 pont/

Osztályzás: I. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen, II. rész pontszáma legfeljebb 3 pont: elégtelen, III. rész pontszáma legfeljebb 5 pont: jegy legfeljebb elégséges, Összpontszám legfeljebb 17 pont: elégtelen, Összpontszám legalább 38 pont: jeles
Táblázatok

A χ^2 -próba kritikus értékei

f	0,1	0,05	0,01
1	2,71	3,84	6,63
2	4,61	5,99	9,21
3	6,25	7,81	11,3
4	7,78	9,49	13,3
5	9,24	11,1	15,1
6	10,6	12,6	16,8
7	12,0	14,1	18,5
8	13,4	15,5	20,1
9	14,7	16,9	21,7
10	16,0	18,3	23,2
11	17,3	19,7	24,7
12	18,5	21,0	26,2
13	19,8	22,4	27,9
14	21,1	23,7	29,1
15	22,3	25,0	30,6

f	0,1	0,05	0,01
16	23,5	26,3	32,0
17	24,8	27,6	33,4
18	26,0	28,9	34,8
19	27,2	30,1	36,2
20	28,4	31,4	37,6
21	29,6	32,7	38,9
22	30,8	33,9	40,3
23	32,0	35,2	41,6
24	33,2	36,4	43,0
25	34,4	37,7	44,3
26	35,6	38,9	45,6
27	36,7	40,1	47,0
28	37,9	41,3	48,3
29	39,1	42,6	49,6
30	40,3	43,8	50,9

Az eloszlás szabadságfoka f , az oszlopok felett a próba terjedelmét adtuk meg.

Ha $f > 30$, akkor normális közelítést alkalmazhatunk: a $(T - f)/\sqrt{f}$ statisztikára vonatkozó kritikus értékek:

0,1	0,05	0,01
2,22	2,85	4,03

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,20	0,9993
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,40	0,9996
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,60	0,9998
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,80	0,9999
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861		
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8079	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Valószínűségszámítás és Statisztika vizsgázárthelyi 2017. január 10.

Az I. és II. rész kérdéseinek mindegyikénél pontosan 1 válasz helyes. A válaszokat írja a kérdések utáni táblázatba! **A szövegben bekarikázott válaszokat nem fogjuk elfogadni!**

I. rész (helyes válaszok: +2 pont, helytelen: -1 pont)

1. X_1, X_2, \dots független, 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

a) Mennyi $X_1 + 4X_2 - 3$ várható értéke?

A: 4	B: -2	C: 6	D: 11	E: 8	F: egyéb
------	-------	------	-------	------	----------

b) Milyen értéket vesz fel $X_1 + X_2$ eloszlásfüggvénye a 0 helyen?

A: 1	B: $2e^{-2}$	C: $4e^{-4}$	D: $0.5e^{-0.5}$	E: 0	F: egyéb
------	--------------	--------------	------------------	------	----------

c) Mihez fog tartani sztochasztikusan $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$?

A: 1-hez	B: 0,5-hez	C: 3-hoz	D: 0-hoz	E: semmihez	F: egyébhez
----------	------------	----------	----------	-------------	-------------

d) Mihez fog tartani $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n < 3n)$?

A: 0,5-hez	B: 1-hez	C: 0-hoz	D: 3-hoz	E: semmihez	F: egyébhez
------------	----------	----------	----------	-------------	-------------

e) Mennyi a $P(X_1 > 301 | X_1 > 300)$ valószínűség?

A: 1	B: e^{-2}	C: 0	D: e^{-301}	E: $1 - e^{-2}$	F: egyéb
------	-------------	------	---------------	-----------------	----------

2. Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot. A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri. Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van. Mekkora valószínűséggel megy tönkre Péter?

A: 16/26	B: 1	C: 0	D: 0,5	E: 10/26	F: egyéb
----------	------	------	--------	----------	----------

3. X 4 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

a) Mennyi X és $(-3X+5)$ korrelációja?

A: 1	B: 1/12	C: 36	D: $1 - \exp(-4)$	E: -1	F: egyéb
------	---------	-------	-------------------	-------	----------

b) Mennyi a $P(X > 1)$ valószínűség?

A: 1	B: $1 - 6e^{-5}$	C: 0	D: $5e^{-4}$	E: $1 - 5e^{-4}$	F: egyéb
------	------------------	------	--------------	------------------	----------

4. Az X valószínűségi változó $N(3, 2^2)$ eloszlású.

a) Milyen eloszlású $(3X-2)$?

A: $N(7, 12)$	B: $N(7, 6^2)$	C: $N(9, 6^2)$	D: ká-négyzet	E: exponenciális	F: egyéb
---------------	----------------	----------------	---------------	------------------	----------

b) Mennyi a $P(X > 1)$ valószínűség?

A: 1	B: $\Phi(1)$	C: 0	D: $\Phi(-1)$	E: $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$	F: egyéb
------	--------------	------	---------------	---	----------

II. rész

5. Egy kísérletsorozatnál megfigyeléseink a következők: 2, 1, 1, 0. (a válaszoknál 2 tizedesjegyre kerekítettünk)

a) Mennyi a minta tapasztalati mediánja? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 0	B: 0,25	C: 1	D: 2	E: 0,5	F: egyéb
------	---------	------	------	--------	----------

b) Milyen értéket vesz fel a tapasztalati eloszlásfüggvény a 3 helyen? (helyes válasz: +2 pont,

helytelen: -1 pont)

A: 0	B: 0,75	C: 1	D: 1,4	E: 0,25	F: egyéb
------	---------	------	--------	---------	----------

c) Mennyi a minta tapasztalati módusza? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 0	B: 0,25	C: 1	D: 2	E: 0,5	F: egyéb
------	---------	------	------	--------	----------

d) Feltételezzük, hogy megfigyeléseink azonos eloszlású Poissonok? Mennyi a Poisson paraméter momentum módszer szerinti becslése? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 0	B: 0,25	C: 1	D: 2	E: 0,5	F: egyéb
------	---------	------	------	--------	----------

6. Az informatikus hallgatók 2016-ban hetente átlagosan 1 liter tejet (átlagosan 200 Ft-ért), 2 liter bort (literenként 400 Ft-ért) és 10 korsó sört (korsónként 500 Ft-ért) ittak meg. 2017-re ezek az átlagos értékek a következők szerint változtak meg 1 liter tej (200 Ft/liter), 3 liter bor (500 Ft/liter) és 20 korsó sör (600 Ft/korsó). Határozza meg az ital fogyasztás 2016 és 2017 közötti Laspeyres-féle árindexét! (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: 120,18	B: 190	C: 120	D: 190,28	E: 110	F: egyéb
-----------	--------	--------	-----------	--------	----------

7. Jancsi és Juliska nullhipotézise az, hogy egy kétórás erdei sétán 4 paraméterű Poisson eloszlású számú boszorkánnyal találkozhatnak. Az ellenhipotézis az, hogy a Poisson paraméter 4-nél kisebb. A hipotézisről egyetlen 2 órás séta alapján akarnak dönteni. Amennyiben legalább 1 boszorkánnyal találkoznak, úgy elfogadják a nullhipotézist. Mekkora a másodikfajú hiba valószínűsége, ha a Poisson paraméter 3? (helyes válasz: +3 pont, helytelen: -2 pont)

A: e^{-3}	B: $1 - e^{-3}$	C: e^{-4}	D: $1 - e^{-4}$	E: $1 - e^{-2}$	F: egyéb
-------------	-----------------	-------------	-----------------	-----------------	----------

8. A Valószínűség számítás és statisztika tárgy oktatójának az a nullhipotézise, hogy egy vizsgán 0,1 annak a valószínűsége, hogy egy diák megbukik (a diákok egymástól függetlenül buknak meg). 200 vizsgázóból 40-en buktak meg. Nullhipotézisünk ellenőrzésére χ^2 próbát alkalmazunk. Az alábbi állítások közül pontosan egy igaz. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	B: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.	C: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.
D: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	E: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	F: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.

NÉV:

Kérdés	1/a	1/b	1/c	1/d	1/e	2.	3/a	3/b	4/a	4/b	5/a	5/b	5/c	5/d	6.	7.	8.
Válasz	F	E	C	A	F	A	E	E	B	B	C	C	C	C	C	B	B

III. rész A következő kérdéseket a kiadott lapokon dolgozza ki! Minden lapra írja rá nevét!

- Definiálja a következő fogalmakat: elsőfajú hiba, mintatér, hatásos becslés! /6 pont/
- Bizonyítsa be, hogy a szimmetrikus bolyongás visszatérési idejének végtelen a várható értéke! /8 pont/
- A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. Egy részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n -el. Bizonyítsa be, hogy X_n 1 valószínűséggel 0-hoz tart, miközben várható értéke végtelenhez konvergál! /8 pont/
- Vezesse le a Poisson eloszlású minta paraméterének maximum likelihood becslését! /6 pont/

Osztályzás: I. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen, II. rész pontszáma legfeljebb 3 pont: elégtelen, III. rész pontszáma legfeljebb 5 pont: jegy legfeljebb elégséges, Összpontszám legfeljebb 17 pont: elégtelen, Összpontszám legalább 38 pont: jeles
Táblázatok

A χ^2 -próba kritikus értékei

f	0,1	0,05	0,01
1	2,71	3,84	6,63
2	4,61	5,99	9,21
3	6,25	7,81	11,3
4	7,78	9,49	13,3
5	9,24	11,1	15,1
6	10,6	12,6	16,8
7	12,0	14,1	18,5
8	13,4	15,5	20,1
9	14,7	16,9	21,7
10	16,0	18,3	23,2
11	17,3	19,7	24,7
12	18,5	21,0	26,2
13	19,8	22,4	27,9
14	21,1	23,7	29,1
15	22,3	25,0	30,6

f	0,1	0,05	0,01
16	23,5	26,3	32,0
17	24,8	27,6	33,4
18	26,0	28,9	34,8
19	27,2	30,1	36,2
20	28,4	31,4	37,6
21	29,6	32,7	38,9
22	30,8	33,9	40,3
23	32,0	35,2	41,6
24	33,2	36,4	43,0
25	34,4	37,7	44,3
26	35,6	38,9	45,6
27	36,7	40,1	47,0
28	37,9	41,3	48,3
29	39,1	42,6	49,6
30	40,3	43,8	50,9

Az eloszlás szabadságfoka f , az oszlopok felett a próba terjedelmét adtuk meg.

Ha $f > 30$, akkor normális közelítést alkalmazhatunk: a $(T - f)/\sqrt{f}$ statisztikára vonatkozó kritikus értékek:

0,1	0,05	0,01
2,22	2,85	4,03

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,20	0,9993
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,40	0,9996
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,60	0,9998
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,80	0,9999
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861		
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8079	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Valószínűségszámítás és Statisztika vizsgázárthelyi 2017. január 10.

Az I. és II. rész kérdéseinek mindegyikénél pontosan 1 válasz helyes. A válaszokat írja a kérdések utáni táblázatba! **A szövegben bekarikázott válaszokat nem fogjuk elfogadni!**

I. rész (helyes válaszok: +2 pont, helytelen: -1 pont)

1. X_1, X_2, \dots független, 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

a) Mennyi $X_1 + 3X_2 - 4$ várható értéke?

A: 4	B: -2	C: 6	D: 11	E: 8	F: egyéb
------	-------	------	-------	------	----------

b) Milyen értéket vesz fel $X_1 + X_2$ eloszlásfüggvénye a 0 helyen?

A: 0	B: $2e^{-2}$	C: 1	D: $0.5e^{-0.5}$	E: $4e^{-4}$	F: egyéb
------	--------------	------	------------------	--------------	----------

c) Mihez fog tartani sztochasztikusan $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$?

A: 1-hez	B: 0-hoz	C: 3-hoz	D: 2-höz	E: semmihez	F: egyébhez
----------	----------	----------	----------	-------------	-------------

d) Mihez fog tartani $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n < 3n)$?

A: 1-hez	B: e^{-3} -hoz	C: 0-hoz	D: 0,5-hez	E: semmihez	F: egyébhez
----------	------------------	----------	------------	-------------	-------------

e) Mennyi a $P(X_1 > 301 | X_1 > 300)$ valószínűség?

A: 1	B: $1 - e^{-3}$	C: 0	D: e^{-301}	E: e^{-3}	F: egyéb
------	-----------------	------	---------------	-------------	----------

2. Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot. A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri. Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van. Mekkora valószínűséggel megy tönkre Gábor?

A: 16/26	B: 1	C: 0	D: 10/26	E: 0,5	F: egyéb
----------	------	------	----------	--------	----------

3. X 5 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

a) Mennyi X és $(-3X+5)$ korrelációja?

A: 1	B: $1 - \exp(-4)$	C: 36	D: -1	E: 1/12	F: egyéb
------	-------------------	-------	-------	---------	----------

b) Mennyi a $P(X > 1)$ valószínűség?

A: 1	B: $1 - 5e^{-4}$	C: 0	D: $1 - 6e^{-5}$	E: $6e^{-5}$	F: egyéb
------	------------------	------	------------------	--------------	----------

4. Az X valószínűségi változó $N(4, 2^2)$ eloszlású.

a) Milyen eloszlású $(3X-4)$?

A: $N(7, 6^2)$	B: $N(7, 12)$	C: ká-négyszet	D: $N(8, 6^2)$	E: exponenciális	F: egyéb
----------------	---------------	----------------	----------------	------------------	----------

b) Mennyi a $P(X > 0)$ valószínűség?

A: $\Phi(2)$	B: 0	C: $\Phi(-2)$	D: 1	E: $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$	F: egyéb
--------------	------	---------------	------	---	----------

II. rész

5. Egy kísérletsorozatnál megfigyeléseink a következők: 2, 2, 1, 0. (a válaszoknál 2 tizedesjegyre kerekítettünk)

a) Mennyi a minta tapasztalati mediánja? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 1,25	C: 0	D: 2	E: 1,5	F: egyéb
------	---------	------	------	--------	----------

b) Milyen értéket vesz fel a tapasztalati eloszlásfüggvény a 3 helyen? (helyes válasz: +2 pont,

helytelen: -1 pont)

A: 0	B: 0,75	C: 1,4	D: 1	E: 0,25	F: egyéb
------	---------	--------	------	---------	----------

e) Mennyi a minta tapasztalati módusza? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 0,25	C: 0	D: 0,5	E: 2	F: egyéb
------	---------	------	--------	------	----------

d) Feltételezzük, hogy megfigyeléseink azonos eloszlású Poissonok? Mennyi a Poisson paraméter momentum módszer szerinti becslése? (helyes válasz: +2 pont, helytelen: -1 pont)

A: 1	B: 0,25	C: 0	D: 1,25	E: 2	F: egyéb
------	---------	------	---------	------	----------

6. Az informatikus hallgatók 2016-ban hetente átlagosan 1 liter tejet (átlagosan 200 Ft-ért), 2 liter bort (literenként 400 Ft-ért) és 10 korsó sör (korsónként 500 Ft-ért) ittak meg. 2017-re ezek az átlagos értékek a következők szerint változtak meg 1 liter tej (200 Ft/liter), 3 liter bor (500 Ft/liter) és 20 korsó sör (600 Ft/korsó). Határozza meg az ital fogyasztás 2016 és 2017 közötti Laspeyres-féle mennyiségi indexét! (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: 120	B: 190,28	C: 120,18	D: 190	E: 110	F: egyéb
--------	-----------	-----------	--------	--------	----------

7. Jancsi és Juliska nullhipotézise az, hogy egy négyórás erdei sétán 3 paraméterű Poisson eloszlású számú boszorkánnyal találkozhatnak. Az ellenhipotézis az, hogy a Poisson paraméter 3-nál kisebb. A hipotézisről egyetlen 4 órás séta alapján akarnak dönteni. Amennyiben legalább 1 boszorkánnyal találkoznak, úgy elfogadják a nullhipotézist. Mekkora a másodikfajú hiba valószínűsége, ha a Poisson paraméter 2? (helyes válasz: +3 pont, helytelen: -2 pont)

A: $1 - e^{-3}$	B: e^{-3}	C: e^{-2}	D: $1 - e^{-4}$	E: $1 - e^{-2}$	F: egyéb
-----------------	-------------	-------------	-----------------	-----------------	----------

8. A Valószínűségszámítás és statisztika tárgy oktatójának az a nullhipotézise, hogy egy vizsgán 0,1 annak a valószínűsége, hogy egy diák megbukik (a diákok egymástól függetlenül buknak meg). 200 vizsgázóból 40-en buktak meg. Nullhipotézisünk ellenőrzésére χ^2 próbát alkalmazunk. Az alábbi állítások közül pontosan egy igaz. Melyik? (helyes válasz: +4 pont, helytelen: -2 pont)

A: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	B: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.	C: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.
D: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	E: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk.	F: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben a 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű próbánál elfogadjuk.

NÉV:

Kérdés	1/a	1/b	1/c	1/d	1/e	2.	3/a	3/b	4/a	4/b	5/a	5/b	5/c	5/d	6.	7.	8.
Válasz	E	A	C	D	F	D	D	D	D	A	E	D	E	D	D	E	B

III. rész A következő kérdéseket a kiadott lapokon dolgozza ki! Minden lapra írja rá nevét!

- Definiálja a következő fogalmakat: elsőfajú hiba, mintatér, hatásos becslés! /6 pont/
 - Bizonyítsa be, hogy a szimmetrikus bolyongás visszatérési idejének végtelen a várható értéke! /8 pont/
 - A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. Egy részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n -el. Bizonyítsa be, hogy X_n 1 valószínűséggel 0-hoz tart, miközben várható értéke végtelenhez konvergál! /8 pont/
 - Vezesse le a Poisson eloszlású minta paraméterének maximum likelihood becslését! /6 pont/
- Összítályás:** I. rész pontszáma legfeljebb 6 pont: elégtelen, II. rész pontszáma legfeljebb 3 pont: elégtelen, III. rész pontszáma legfeljebb 5 pont: jegy legfeljebb elégséges, Összpontszám legfeljebb 17 pont: elégtelen, Összpontszám legalább 38 pont: jeles
- Táblázatok**

A χ^2 -próba kritikus értékei

f	0,1	0,05	0,01
1	2,71	3,84	6,63
2	4,61	5,99	9,21
3	6,25	7,81	11,3
4	7,78	9,49	13,3
5	9,24	11,1	15,1
6	10,6	12,6	16,8
7	12,0	14,1	18,5
8	13,4	15,5	20,1
9	14,7	16,9	21,7
10	16,0	18,3	23,2
11	17,3	19,7	24,7
12	18,5	21,0	26,2
13	19,8	22,4	27,9
14	21,1	23,7	29,1
15	22,3	25,0	30,6

f	0,1	0,05	0,01
16	23,5	26,3	32,0
17	24,8	27,6	33,4
18	26,0	28,9	34,8
19	27,2	30,1	36,2
20	28,4	31,4	37,6
21	29,6	32,7	38,9
22	30,8	33,9	40,3
23	32,0	35,2	41,6
24	33,2	36,4	43,0
25	34,4	37,7	44,3
26	35,6	38,9	45,6
27	36,7	40,1	47,0
28	37,9	41,3	48,3
29	39,1	42,6	49,6
30	40,3	43,8	50,9

Az eloszlás szabadságfoka f , az oszlopok felett a próba terjedelmét adtuk meg.

Ha $f > 30$, akkor normális közelítést alkalmazhatunk: a $(T - f)/\sqrt{f}$ statisztikára vonatkozó kritikus értékek:

0,1	0,05	0,01
2,22	2,85	4,03

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985
0,24	0,5948	0,69	0,7549	1,14	0,8729	1,59	0,9441	2,08	0,9812	2,98	0,9986
0,25	0,5987	0,70	0,7580	1,15	0,8749	1,60	0,9452	2,10	0,9821	3,00	0,9987
0,26	0,6026	0,71	0,7611	1,16	0,8770	1,61	0,9463	2,12	0,9830	3,20	0,9993
0,27	0,6064	0,72	0,7642	1,17	0,8790	1,62	0,9474	2,14	0,9838	3,40	0,9996
0,28	0,6103	0,73	0,7673	1,18	0,8810	1,63	0,9484	2,16	0,9846	3,60	0,9998
0,29	0,6141	0,74	0,7704	1,19	0,8830	1,64	0,9495	2,18	0,9854	3,80	0,9999
0,30	0,6179	0,75	0,7734	1,20	0,8849	1,65	0,9505	2,20	0,9861		
0,31	0,6217	0,76	0,7764	1,21	0,8869	1,66	0,9515	2,22	0,9868		
0,32	0,6255	0,77	0,7794	1,22	0,8888	1,67	0,9525	2,24	0,9875		
0,33	0,6293	0,78	0,7823	1,23	0,8907	1,68	0,9535	2,26	0,9881		
0,34	0,6331	0,79	0,7852	1,24	0,8925	1,69	0,9545	2,28	0,9887		
0,35	0,6368	0,80	0,7881	1,25	0,8944	1,70	0,9554	2,30	0,9893		
0,36	0,6406	0,81	0,7910	1,26	0,8962	1,71	0,9564	2,32	0,9898		
0,37	0,6443	0,82	0,7939	1,27	0,8980	1,72	0,9573	2,34	0,9904		
0,38	0,6480	0,83	0,7967	1,28	0,8997	1,73	0,9582	2,36	0,9909		
0,39	0,6517	0,84	0,7995	1,29	0,9015	1,74	0,9591	2,38	0,9913		
0,40	0,6554	0,85	0,8023	1,30	0,9032	1,75	0,9599	2,40	0,9918		
0,41	0,6591	0,86	0,8051	1,31	0,9049	1,76	0,9608	2,42	0,9922		
0,42	0,6628	0,87	0,8079	1,32	0,9066	1,77	0,9616	2,44	0,9927		
0,43	0,6664	0,88	0,8106	1,33	0,9082	1,78	0,9625	2,46	0,9931		
0,44	0,6700	0,89	0,8133	1,34	0,9099	1,79	0,9633	2,48	0,9934		

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$