Valószínűségszámítás
2. előadás

Arató Miklós

Esély

Várható

Kockázat

Véletlen

Hiba

Előrejelzés

ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Feltételes valószínűség

- Amennyiben $P(B) > 0$, akkor az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűsége:
$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Feltételes valószínűség (folyt.)

- Amennyiben $P(B) > 0$, akkor $(\Omega, \mathcal{A}, P(.\,|B))$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező lesz.

$$\Longrightarrow$$

- A „"normál" valószínűségre bizonyítottak a feltételes valószínűségre is teljesülnek.

Bayes-formula

- Tegyük fel, hogy $P(B) > 0, 0 < P(A) < 1$, ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

Teljes eseményrendszer

- Definíció: $A_1, A_2, \ldots$ teljes eseményrendszert alkotnak, ha

$$A_i A_j = \emptyset, i \neq j\text{-re és}$$

$$\bigcup_i A_i = \Omega$$

Teljes valószínűség tétele

- Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots$ $(0 < P(A_i))$ teljes eseményrendszer, ekkor

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

Bizonyítás:

$$B = \bigcup_i BA_i \Longrightarrow P(B) = \sum_i P(BA_i) = \sum_i \frac{P(BA_i)}{P(A_i)} P(A_i)$$

Szindbád és a háremhölgyek

- Szindbád a szultánnak tett szolgálataiért cserében 100 háremhölgy közül választhat. Azonban a háremhölgyeket nem egyszerre, hanem sorban egymás után mutatják be neki. Amennyiben egy bemutatott hölgyet nem választ ki azonnal, úgy már az örökké elveszik számára. Milyen stratégiát válasszon Szindbád, hogy a legszebb választásának minél nagyobb legyen a valószínűsége?

Stratégia

- Szindbád azt a stratégiát választja, hogy elengedi az első k hölgyet, és az utána következők közül az addigi legszebbet választja.
- Mennyi az optimális k?

Megoldás

- A_i: $i -$ edik hölgyet választja Szindbád $(i = k+1, k+2, \dots, n = 100)$.
- A_0 egyik hölgyet sem választja ki Szindbád
- $A_0, A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer
- B: a legszebbet választja ki

Megoldás (folyt.)

- $P(B) = \sum_i P(BA_i)$
- $P(BA_0) = 0$
- $P(BA_i) =$
$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (i-2) \cdot 1 \cdot i \cdot \ldots \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} =$$
$$= \frac{k}{(i-1)n}$$
- $P(B) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{k}{(i-1)n} = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$
- Milyen k-ra lesz ez maximális?

Megoldás (folyt.)

- k_n^*: az optimális érték
- $\frac{n}{k_n^*} \to e$

Bayes-formula általános alakja

- Tegyük fel, hogy $P(B) > 0, A_1, A_2, \ldots$

$(0 < P(A_i))$ teljes eseményrendszer, ekkor

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Bizonyítás:

$$P(A_k|B) = \frac{P(BA_k)}{P(B)} = \frac{\frac{P(BA_k)}{P(A_k)}P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

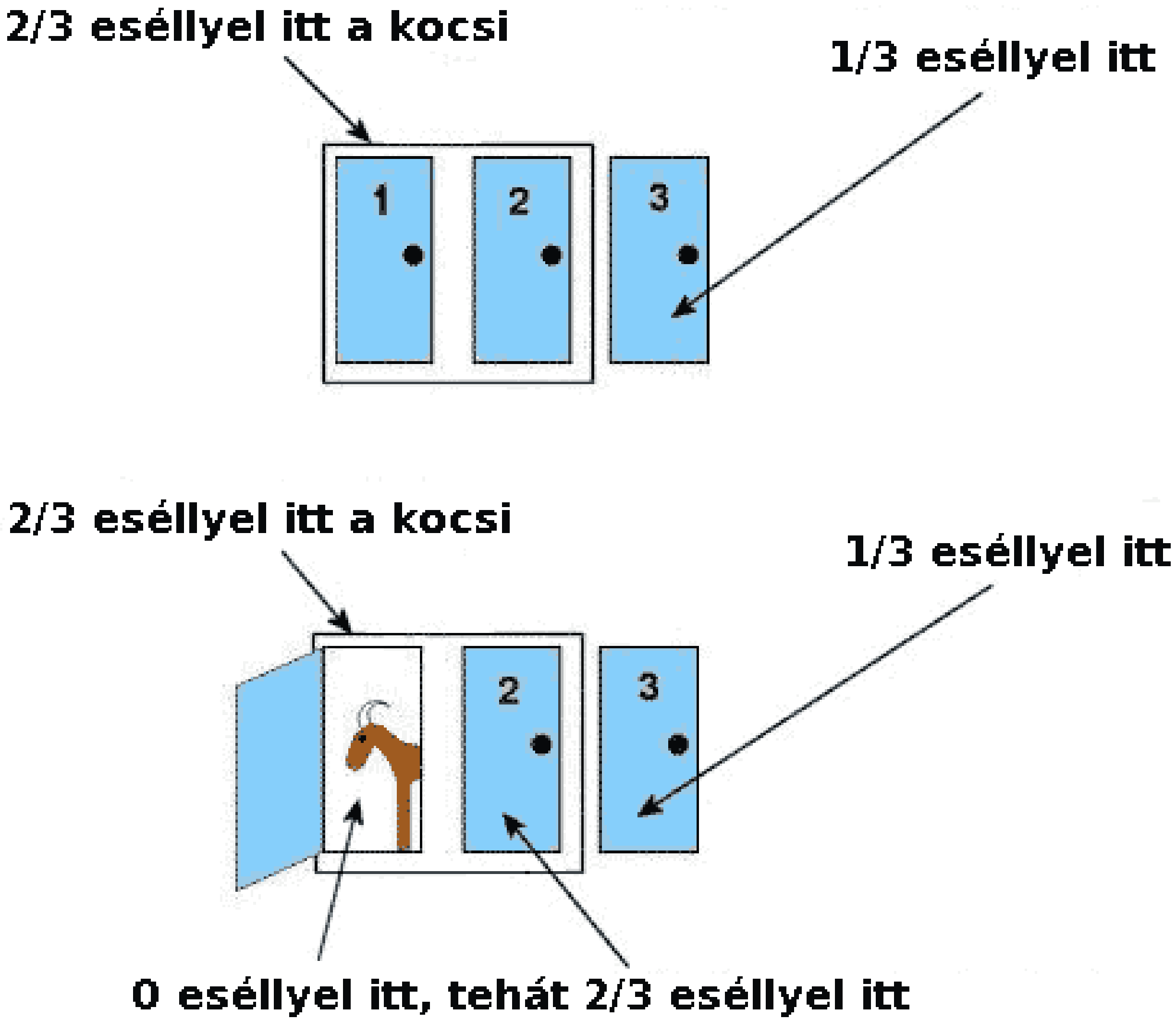
Monty Hall-paradoxon

- Képzeljük el, hogy egy vetélkedőben szerepel, és három ajtó közül kell választania. Az egyik mögött kocsi van, a másik kettő mögött viszont kecske. Tegyük fel, hogy maga a 3. ajtót választja, mire a műsorvezető, aki tudja, melyik ajtó mögött mi van, kinyitja az 1. ajtót, megmutatván, hogy amögött kecske van. Ezután önhöz fordul, és megkérdezi: „Nem akarja esetleg mégis a 2. ajtót választani?" Vajon előnyére válik, ha vált?

Megoldás

- A_i: $i-$edik ajtó mögött van a kocsi
- $P(A_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$
- B: műsorvezető az első ajtót nyitja ki
- Kérdés: $P(A_3|B) =?$
- $P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{0\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$


2/3 eséllyel itt a kocsi
1/3 eséllyel itt
1
2
3
2/3 eséllyel itt a kocsi
1/3 eséllyel itt
2
3
0 eséllyel itt, tehát 2/3 eséllyel itt

Függetlenség

- Az egyik legfontosabb valószínűségszámítási fogalom.
- Definíció: A és B függetlenek, ha $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Ha $P(B) > 0$, akkor

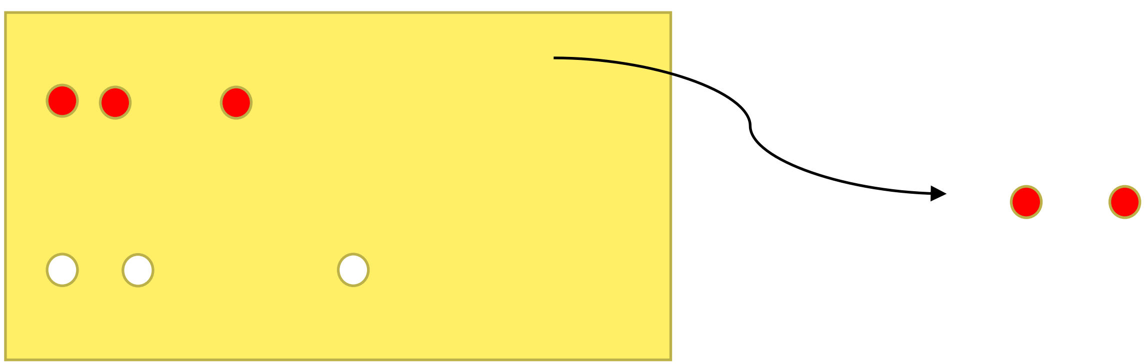
A és B függetlenek $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Bizonyítás:

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \underset{P(B)>0}{\Longleftrightarrow} P(AB) = P(A)P(B)$$

Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban M piros és $N-M$ fehér golyó van. 2-szer húzunk.
- A: elsőre pirosat, B: másodikra pirosat húzunk. Függetlenek-e?



Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel (folyt.)

- $P(A) = P(B) = \frac{M}{N}$.
- Visszatevésesnél:

$$P(AB) = \frac{M^2}{N^2} = P(A)P(B).$$

- Visszatevés nélkül:

$$P(AB) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)} \neq P(A)P(B).$$

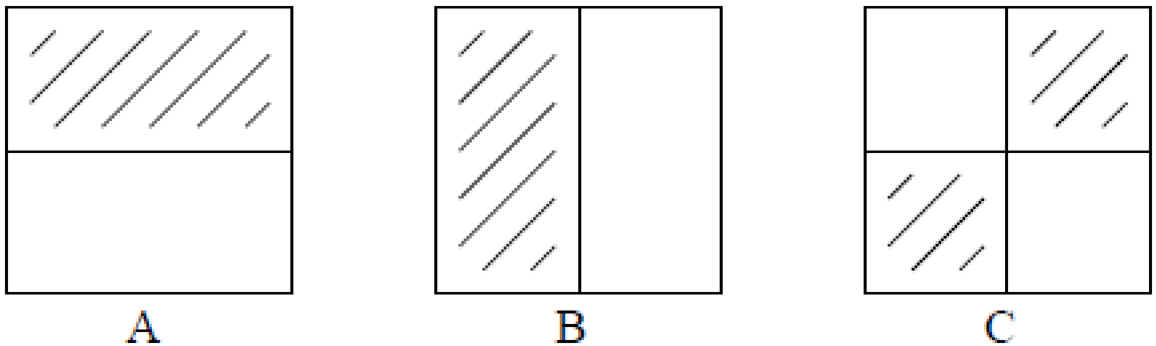
Több esemény függetlensége

- Definíció: $A_1, A_2, \dots, A_n$ függetlenek, ha bárhogy választunk ki közülük k darabot $(2 \leq k \leq n)$ úgy:

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

- Nem elég sem a páronkénti függetlenség, sem az "n-es szorzat"!

Páronkénti, de nem teljes függetlenség



$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \tfrac{1}{4}$$

$$P(ABC) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Jogos volt-e az ítélet?

- 1999-ben egy brit bíróság elítélte Sally Clarkot, mert 2 gyermeke is hirtelen csecsemőhalállal hunyt el.
- Az indok az volt, hogy a gyermekorvos szakértő szerint egy csecsemőnél 1/8500 az esélye egy ilyen halálesetnek, ezért a bíróság szerint a 2 eset valószínűsége ~ 1/73 millió.
- Későbbi kutatások kimutatták, hogy az első haláleset után a második esetnek már 1/100 az esélye (nem függetlenek).