Valószínűségszámítás

3. előadás

Arató Miklós

2021.02.23.

Tartalomjegyzék

Valószínűségi változók

Definíció: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.

Valószínűségi változók

Definíció: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.
Definíció: A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan x_i valós számok és A_i teljes eseményrendszer, hogy $\xi = \sum_k x_k \cdot \chi_{A_k}$.

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Definíció: $\xi \geq 0$ **diszkrét**, ekkor $E\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$.

Definíció: ξ **diszkrét**, ekkor $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, ha $\min(E\xi^+, E\xi^-) < \infty$.

Tulajdonságok:

1. $E(c \cdot \xi) = c \cdot E\xi$.
2. Ha $\xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta$.
3. Ha létezik $E\xi$, akkor $|E\xi| \leq E|\xi|$.
4. Ha létezik $E\xi$, $E\eta$, és $E\xi + E\eta$ értelmes, akkor $E(\xi + \eta) = E\eta + E\xi$ is létezik.
5. Ha $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow E\xi = 0$.

Meghatározás és Teljes várható érték tétel

Definíció: $P(A) > 0$, ξ diszkrét, ekkor ξ **feltételes várható értéke** az A feltételre nézve:
$E(\xi|A) = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k|A)$.

Teljes várható érték tétel: ξ diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel és $A_1, A_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, ahol $0 < P(A_i)$. Ekkor $E\xi = \sum_n E(\xi|A_n) \cdot P(A_n)$.

Wald-azonosság

$X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyekre létezik EX_i, és N egy tőlük független pozitív, egészértékű valószínűségi változó.

Ekkor $E(X_1 + \ldots X_N) = EX_1 \cdot EN$.

$P(X_1 + \ldots + X_N = y | N = n) = \frac{P(X_1 + \ldots + X_n = y, N = n)}{P(N = n)} =$
$P(X_1 + \ldots + X_n = y) \Rightarrow E(X_1 + \ldots + X_N = y | N = n) = n \cdot EX_1 \Rightarrow$
$E(X_1 + \ldots + X_N) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_1 + \ldots + X_N | N = n) \cdot P(N = n) =$
$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot EX_1 \cdot P(N = n) = EX_1 \cdot EN$

Geometriai eloszlás

$P(\eta = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$, ahol $k \geq 1$.

$E\eta = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$.

A : az első kísérlet sikeres

$E\eta = E(\eta|A) \cdot P(A) + E(\eta|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \Rightarrow$

$E\eta = 1 \cdot p + (1 + E\eta) \cdot (1-p) \Rightarrow E\eta = \frac{1}{p}$

Várhatóan mikor lesz meg mind a 24 törpünk?

$\frac{24}{24} + \frac{24}{23} + \ldots + \frac{24}{2} + \frac{24}{1} = 90,623$

szimmetrikus bolyongás

ξ : lépések száma n-ből 0-ba ($n \geq 0$), $v(n) := E\xi$.
A : az első lépésben jobbra lépünk $\Rightarrow E\xi = E(\xi|A) \cdot \frac{1}{2} + E(\xi|\overline{A}) \cdot \frac{1}{2}$
$E(\xi|A) = 1 + v(n+1)$ és $E(\xi|\overline{A}) = 1 + v(n-1) \Rightarrow$
$2v(n) = 2 + v(n+1) + v(n-1)$
$v(0) = 0$
$v(n+1) - v(n) = v(n) - v(n-1) - 2 = \ldots = v(1) - v(0) - 2n. \Rightarrow$
$v(n) = v(n) - v(n-1) + v(n-1) + v(n-2) + \ldots + v(1) - v(0) + v(0)$
$\Rightarrow n \cdot v(1) - n(n-1) = n(v(1) - (n-1)) \geq 0 \Rightarrow v(1) \geq n-1$
minden n-re $\Rightarrow v(1) = +\infty \Rightarrow$
szimmetrikus bolyongásnál várhatóan végtelen sok lépésben térünk vissza a kiindulási pontba.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye** $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye** $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{y \downarrow x} F_\xi(y) - F(x) = P(\xi = x)$$

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye**
$F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.
$\lim_{y \downarrow x} F_\xi(y) - F(x) = P(\xi = x)$
Diszkrét esetben $P(\xi = x_k) = F_\xi(x_{k+1}) - F_\xi(x_k)$

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Állítás: Az F_ξ eloszlásfüggvényre teljesülnek az alábbiak:

1. F_ξ monoton növő.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$ és $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
3. F_ξ balról folytonos és jobbról létezik a határértéke minden $x \in \mathbb{R}$ helyen.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, ha $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ minden $x \in \mathbb{R}$, ahol f véges sok ponttól eltekintve folytonos

f: sűrűségfüggvény

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, ha $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ minden $x \in \mathbb{R}$, ahol f véges sok ponttól eltekintve folytonos

f: sűrűségfüggvény

$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, ds = 1, f(x) \geq 0$

$F'(x) = f(x)$ véges sok pontot kivéve

Egyenletes eloszlás intervallumon

Tekintsünk $[a, b]$-n geometriai valószínűségi mezőt.
$\xi(w) = w$.

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & : \quad a < x < b \\ 1 & : \quad b \leq x \end{cases} .$$

Az ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük az $[a, b]$ intervallumon.
Jelölés: $E(a, b)$ vagy $U(a, b)$.

Sűrűségfüggvény: $f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & : \quad x \in [a, b] \end{cases}$.

λ-exponenciális eloszlás

τ: egy izzó élettartama
örökifjú tulajdonság: $P(\tau > t + s \mid \tau > s) = P(\tau > t)$, ahol $t, s > 0$
$G(t) = P(\tau > t)$, így $\frac{G(t+s)}{G(s)} = \frac{P(\tau>t+s\ ,\ \tau>s)}{P(\tau>s)} = G(t)$, azaz
$G(t + s) = G(t) \cdot G(s) \Rightarrow$.
$G(t) = e^{-\lambda t}$ alakú. Mivel $G(t)$ valószínűség, ezért $\lambda > 0$.
Az eloszlásfüggvény balról folytonossága miatt
$P(\tau < t) \geq \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) \geq \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau < t - \varepsilon) = P(\tau < t) \Rightarrow$
$P(\tau < t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (1 - e^{-\lambda(t-\varepsilon)}) = 1 - e^{-\lambda t}$.

λ-exponenciális eloszlás (folyt.)

λ-exponenciális eloszlású:

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 0 \ : \ t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \ : \ 0 < t \end{cases}$$

sűrűségfüggvény: $f_\tau(t) = \begin{cases} 0 \ : \ t \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} \ : \ 0 < t \end{cases}$.

Könnyen látható a fordított irány is, tehát, hogy egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó örökifjú eloszlású.

Gamma-eloszlás

$\xi \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$ eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \leq 0 \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} & : \ 0 < x \end{cases},$$

ahol $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx$.

(Megj.: $\Gamma(n) = (n-1)!$.)

Standard normális eloszlás

A ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \ (x \in \mathbb{R})$.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} \, dt \, ds \overset{(\varphi,r)}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \, dr =$$

$$2\pi \cdot \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\pi \Rightarrow . \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = 1$$

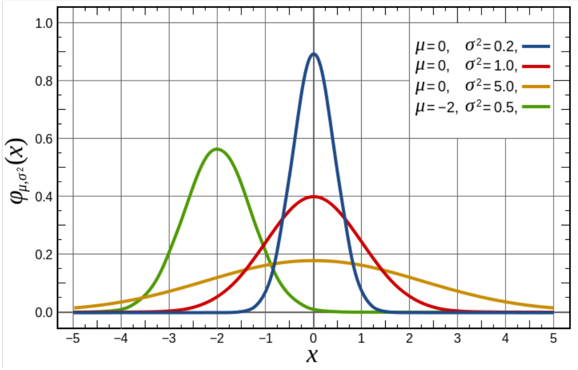
eloszlásfüggvény: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$.

Jelölése: $N(0,1)$.

Normális eloszlás

ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású $\Rightarrow \eta = m + \sigma\xi$ normális eloszlású.
Eloszlásfüggvénye:
$P(m + \sigma\xi < x) = P(\xi < \frac{x-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$.
A sűrűségfüggvény: $f_{m+\sigma\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.
Ez a normális eloszlás m és σ^2 paraméterekkel, jelölése: $N(m, \sigma^2)$.
Fordítva, ha $\eta \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\frac{\eta - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Haranggörbe



ábra: Normális sűrűségfüggvények

Táblázat

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984
0,23	0,5910	0,68	0,7517	1,13	0,8708	1,58	0,9429	2,06	0,9803	2,96	0,9985

Meghatározás

Definíció: A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha $P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i)$ minden $x_1, \dots, x_n$-re.

Definíció: A $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha minden n-re $\xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek.

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek és g_i Borel-mérhető. Ekkor $g_1(\xi_1), \dots, g_n(\xi_n)$ is függetlenek.

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ diszkrétek. Ekkor pontosan akkor függetlenek, ha $P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_i)$ minden x_i-re.

Diszkrét konvolúciós formula

Legyenek ξ és η függetlenek, értékkészletük pedig $\{x_k\}$ és $\{y_l\}$.

$$P(\xi+\eta=z)=P\Big(\bigcup_{x_k+y_l=z}\{\xi=x_k,\eta=y_l\}\Big)=$$

$$\sum_{x_k+y_l=z}P(\xi=x_k,\eta=y_l)=\sum_{x_k+y_l=z}P(\xi=x_k)\cdot P(\eta=y_l).$$

Binomiálisak konvolúciója

Legyenek $\xi \sim B(n_1, p)$ és $\eta \sim B(n_2, p)$ függetlenek. Ekkor $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Ugyanis $\xi + \eta$ értékkészlete $0, 1, \ldots, n_1 + n_2$, így

$$P(\xi + \eta = k) = \sum_{l=0}^{k} P(\xi = l) \cdot P(\eta = k - l) =$$

$$\sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n_1-l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^{k-l} \cdot (1-p)^{n_2-k+l} =$$

$$\sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} =$$

$$p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \binom{n_1+n_2}{k},$$ azaz $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Binomiálisak konvolúciója

Legyenek $\xi \sim B(n_1, p)$ és $\eta \sim B(n_2, p)$ függetlenek. Ekkor $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Ugyanis $\xi + \eta$ értékkészlete $0, 1, \ldots, n_1 + n_2$, így

$$P(\xi + \eta = k) = \sum_{l=0}^{k} P(\xi = l) \cdot P(\eta = k - l) =$$

$$\sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n_1-l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^{k-l} \cdot (1-p)^{n_2-k+l} =$$

$$\sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} =$$

$p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \binom{n_1+n_2}{k}$, azaz $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Binomiálisak konvolúciója (folyt.)

egyszerűbben is kiszámítható: legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású p-indikátorok, ekkor $X_1 + \ldots + X_n \sim B(n, p)$, $X_{n+1} + \ldots + X_{n+m} \sim B(m, p)$, és így $X_1 + \ldots + X_{n+m} \sim B(n + m, p)$.

Poisson eset

Legyenek $\xi \sim \lambda$-Poisson és $\eta \sim \mu$-Poisson függetlenek. Ekkor $\xi + \eta \sim (\lambda + \mu)$-Poisson.

Ugyanis $P(\xi + \eta = k) = \sum_{l=0}^{k} P(\xi = l) \cdot P(\eta = k - l) =$

$\sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda^l \cdot e^{-\lambda}}{l!} \cdot \frac{\mu^{k-l} \cdot e^{-\mu}}{(k-l)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \cdot \lambda^l \cdot \mu^{k-l} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \cdot (\lambda + \mu)^k,$
$\Rightarrow$
$(\lambda + \mu)$ paraméterű Poisson-eloszlást kapunk.

Konvolúciós formula

Legyenek ξ és η független, abszolút folytonos valószínűségi változók. Ekkor $\xi+\eta$ is abszolút folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-y)\cdot f_\eta(y)\;dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(y)\cdot f_\eta(x-y)\;dy.$$

Exponenciálisak konvolúciója

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ független λ-exponenciális valószínűségi változók
$\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \Rightarrow$.

Állítás: η_n sűrűségfüggvénye $g_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{n-1} \cdot \lambda^n \cdot e^{-\lambda x}}{(n-1)!} & x > 0 \end{cases}$.

Bizonyítás: n-re vonatkozó teljes indukció
$n = 1$ rendben . Tegyük fel, hogy n-ig igaz az állítás. $\Rightarrow (n+1)$-re:

$$g_{n+1}(x) = f_{(\xi_1 + \ldots + \xi_n + \xi_{n+1})}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{\xi_1 + \ldots + \xi_n}(x-y)}_{g_n(x-y)} \cdot \underbrace{f_{\xi_{n+1}}(y)}_{g_1(y)}\, dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(x-y)^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda(x-y)}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y}\, dy =$$

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda x}}{n!} \int_0^x n(x-y)^{n-1} dy = \frac{x^n \lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda x}$$

"Buszok száma"

Olyan autóbuszjáratot, ahol a buszok követési ideje egymástól független, azonos λ-exponenciális eloszlású.
ξ_1 : az első busz beérkezési ideje, ξ_2 : az első és a második busz érkezése közötti idő, stb. N busz érkezik a $[0,t)$-ben.

$$P(N=n)=P(N\geq n)-P(N\geq n+1)=P(\eta_n<t)-P(\eta_{n+1}<t)=$$

$$\int_0^t \frac{x^{n-1}\lambda^n e^{-\lambda x}}{(n-1)!}dx-\int_0^t \frac{x^n\lambda^{n+1}e^{-\lambda x}}{n!}dx=$$

$$\frac{\lambda^n}{n!}\left\{\int_0^t nx^{n-1}e^{-\lambda x}dx-\underbrace{\int_0^t x^n\lambda e^{-\lambda x}dx}_{[x^n e^{-\lambda x}]_0^t-\int_0^t nx^{n-1}e^{-\lambda x}dx}\right\}=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},$$