

Valószínűségszámítás

5. előadás

Arató Miklós

2021.03.09.

Tartalomjegyzék

- 1 Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség
- 2 Nagy számok törvénye
- 3 Konvergenciák
- 4 Nagy számok erős törvénye

Egyenlőtlenségek

Tétel [Markov-egyenlőtlenség]: Legyen ξ nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik az $E\xi$ várható értéke, továbbá legyen c pozitív szám. Ekkor $P(\xi \geq c) \leq \frac{E\xi}{c}$.

Tétel[Csebisev-egyenlőtlenség]: Ha ξ szórásnégyzete véges, azaz $D^2\xi < \infty$, valamint $0 \leq \lambda$, akkor teljesül a $P(|\xi - E\xi| \geq \lambda) \leq \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$ egyenlőtlenség.

Biz.: A Markov-egyenlőtlenségből könnyen adódik, hiszen az $\eta := (\xi - E\xi)^2$ választással $P(\eta \geq \lambda^2) \leq \frac{E\eta}{\lambda^2} = \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$.

Példa

Egy országban meg szeretnék becsülni a koronavírussal fertőzöttek arányát úgy, hogy legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk.

Példa

Egy országban meg szeretnék becsülni a koronavírussal fertőzöttek arányát úgy, hogy legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk. Jelölje N az ország lakosai, M a koronavírussal fertőzöttek száma, n pedig a megvizsgáltak számát, ekkor $p := \frac{M}{N}$ -et akarjuk jól közelíteni. Legyen továbbá X_i értéke 1, ha az i -edik megvizsgált koronavírussal fertőzött és 0 különben. Ekkor a

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{M}{N}\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, ami pontosan akkor igaz, ha $P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq 0,05$. A Csebisev-egyenlőtlenség

alapján $P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq \frac{D^2(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n})}{0,01^2}$, ahol

$$\frac{\frac{1}{n^2} D^2(\sum X_i)}{0,01^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p(1-p)}{0,01^2} = \frac{10000 \cdot p(1-p)}{n} \leq \frac{10000 \cdot \frac{1}{4}}{n} \leq \frac{5}{100}, \text{ tehát}$$

$n > 50000$ ember megvizsgálása biztosan elegendő. 

Törvény

Tétel[A nagy számok gyenge törvénye]: Legyenek ξ_1, ξ_2, \dots páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $D^2\xi_i < \infty$ és $E\xi_i = m$. Ekkor minden $0 < \varepsilon$ -ra

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Biz.: Tudjuk, hogy $E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = n \cdot m$. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenséget felhasználva

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot D^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n D^2\xi_i}{\varepsilon^2} =$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{D^2\xi_1}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Példa

Tekintsünk független kísérleteket, minden kísérlet legyen p valószínűséggel sikeres.

Jelölje η_n a sikeres kísérletek számát az első n kísérletben.

Ekkor $P(|\frac{\eta_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

Legyen ugyanis $\eta_n = X_1 + \dots + X_n$, ahol $X_i = 1$, ha az i -edik kísérlet sikeres, különben pedig 0.

Továbbá $EX_i = p$ és $D^2X_i = p(1 - p)$. Így X_i -kre teljesülnek az előbbi tétel feltételei, tehát a relatív gyakoriság tart p -hez.

Sztochasztikus konvergencia

Definíció: A ξ_n valószínűségi változó-sorozat **sztochasztikusan tart** ξ -hez, ha minden $0 < \varepsilon$ -ra $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ esetén. Jelölése: $\xi_n \Rightarrow \xi$ (vagy $\xi_n \xrightarrow{st.} \xi$).

Állítás: Ha $\xi_n \Rightarrow \xi$, akkor $P(\xi_n < x) \rightarrow P(\xi < x)$ ($n \rightarrow \infty$), ez utóbbi minden folytonossági pontjában.

Bizonyítás

Legyen $A_n := \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$. Ekkor

$$P(\xi_n < x) = P((\xi_n < x) \cap A_n) + P((\xi_n < x) \cap \overline{A_n}) \leq \\ P((\xi_n < x) \cap A_n) + P(\overline{A_n}) =$$

$$P(((\xi_n - \xi) < (x - \xi)) \cap A_n) + P(\overline{A_n}) \leq$$

$$P(\xi < x + \varepsilon, A_n) + P(\overline{A_n}) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + P(\overline{A_n}) \Rightarrow$$

$$\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + \limsup P(\overline{A_n}), \text{ ahol}$$

$$\limsup P(\overline{A_n}) = 0 \text{ minden } 0 < \varepsilon\text{-ra } \Rightarrow$$

Ha x folytonossági pontja $P(\xi < x)$ -nek, akkor

$$\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x).$$

Bizonyítás (folyt.)

$$\begin{aligned} P(\xi_n < x) &\geq P(\xi_n < x, A_n) = P(\xi_n + \xi < x + \xi, A_n) = \\ &P(\xi < x + \xi - \xi_n, A_n) \geq P(\xi < x - \varepsilon, A_n) = \\ &P(\xi < x - \varepsilon) - P(\xi < x - \varepsilon, \overline{A_n}) \geq \\ &P(\xi < x - \varepsilon) - P(\overline{A_n}) \Rightarrow \\ \liminf P(\xi_n < x) &\geq P(\xi < x - \varepsilon) - \limsup P(\overline{A_n}), \text{ ahol} \\ \limsup P(\overline{A_n}) = 0 &\Rightarrow \liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x - \varepsilon) \text{ minden} \\ 0 < \varepsilon\text{-ra} &\Rightarrow \liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x). \end{aligned}$$

A folytonossági pontokban $\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x)$ és $\liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x) \Rightarrow \lim P(\xi_n < x) = P(\xi < x)$.

Konvergenciák

Definíció:

$\xi_n \rightarrow \xi$ **eloszlásban**, ha $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\xi(x)$ az utóbbi minden folytonossági pontjában.

$\xi_n \rightarrow \xi$ **majdnem mindenütt**, ha $P(w : \xi_n(w) \rightarrow \xi(w)) = 1$. [1 valószínűségű konvergencia].

$\xi_n \rightarrow \xi$ **L^p -ben**, ha $E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Állítás: Ha $\xi_n \rightarrow \xi$ L^p -ben, akkor $\xi_n \Rightarrow \xi$

Bizonyítás:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \rightarrow 0.$$

Állítás: Ha $\xi_n \rightarrow \xi$ 1 valószínűséggel, akkor $\xi_n \Rightarrow \xi$

Példa

ξ_n tart ξ -hez majdnem mindenütt, de L^p -ben nem
 $\Omega := [0, 1]$ geometriai valószínűségi mező

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} e^n & : \omega \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & : \omega \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases} .$$

Ekkor $\xi_n \rightarrow 0$ majdnem mindenütt, viszont

$$E|\xi_n|^p = \frac{1}{n} e^{np} + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 0 = \frac{e^{np}}{n} \not\rightarrow 0.$$

Tétel

Állítás: $\xi_n \rightarrow \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha
 $\lim_{m \rightarrow \infty} P(\sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$ minden pozitív ε -ra.

Következmény: $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$ minden $0 < \varepsilon \Rightarrow$
 $\xi_n \rightarrow \xi$ 1 valószínűséggel.

Bizonyítás: $P\left(\sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) = P\left(\bigcup_{n \geq m} \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq$
 $\sum_{n=m}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$

Nagy számok Cantelli-féle erős törvénye: ξ_1, ξ_2, \dots független,
azonos eloszlású valószínűségi változók és $E|\xi_n - E\xi_n|^4$ véges.

Ekkor $\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \rightarrow E\xi_1$ 1 valószínűséggel.

Bizonyítás

Megjegyzés: Elég, ha $E|\xi_i| < \infty$, ez a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye

Bizonyítás: $m = E\xi_1, \tilde{\xi}_k = \xi_k - m$

Elég $\frac{\sum_{k=1}^n \tilde{\xi}_k}{n} \rightarrow 0$. $S_n = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}_k, P(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon) \leq \frac{E(\frac{S_n}{n})^4}{\varepsilon^4}$

$$S_n^4 = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}_k^4 + 6 \cdot \sum_{i < j} \tilde{\xi}_i^2 \tilde{\xi}_j^2 +$$

$$12 \cdot \sum_{i \neq j, i \neq k, i < k} \tilde{\xi}_i^2 \tilde{\xi}_j \tilde{\xi}_k + 24 \cdot \sum_{i < j < k < l} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_l + 4 \cdot \sum_{i \neq j} \tilde{\xi}_i^3 \tilde{\xi}_j \Rightarrow$$

$$ES_n^4 = nE\tilde{\xi}_1^4 + 6 \cdot \sum_{i < j} E\tilde{\xi}_i^2 E\tilde{\xi}_j^2 = nE\tilde{\xi}_1^4 + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} (E\tilde{\xi}_1^2)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{ES_n^4}{n^4} < c \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon) < \infty$$

Példa 1.

0,25-paraméterű indikátor és $N(0,25,1)$ változók átlaga

Definíció: Az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású, ha eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha & x > 0. \end{cases}$$

(1,5)-Pareto változók átlaga

Példa 2.

"A számok rendese" (Borel): $\Omega = [0, 1]$, $w = 0, w_1 w_2 \dots$ 2-es diadikus tört és $\xi_n(w) = w_n$ (n -edik számjegy)

$$\left\{ w : \xi_1(w) = x_1, \dots, \xi_n(w) = x_n \right\} = \\ \left\{ w : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} \leq w < \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right\} \Rightarrow$$

$$P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \frac{1}{2^n} \Rightarrow P(\xi_i = x_i) = \frac{1}{2}$$

$x_i = 0, 1$ és ξ -k függetlenek. \Rightarrow

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \rightarrow E\xi_1 = \frac{1}{2} \text{ 1 valószínűséggel}$$

Példa 3.

Monte-Carlo módszer: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ folytonos.

Kérdés: $\int_0^1 f(x) dx$ becsülhető-e véletlen számgenerálás segítségével?

$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ független $E(0, 1)$ -eloszlásúak

$$\varrho_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } f(\xi_i) > \eta_i \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

Belátható, hogy $E\varrho_i = P(f(\xi_i) > \eta_i) = \int_0^1 f(x) dx$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \varrho_i}{n} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

Példa 4.

A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n -el. Mihez tart X_n ?

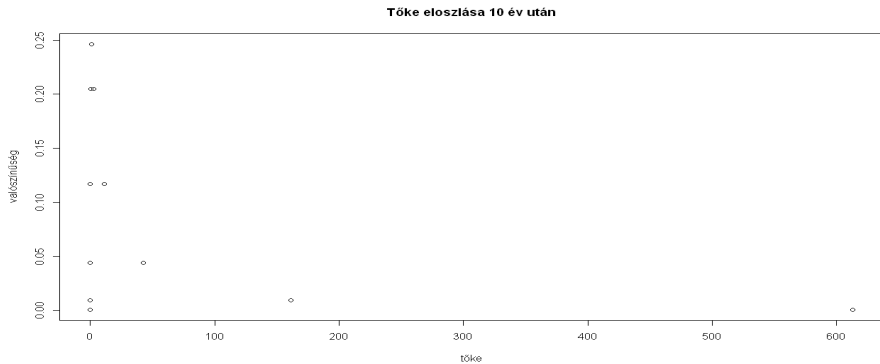
Példa 4.

A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n -el. Mihez tart X_n ?

A részvény várható éves hozama 20%.

Y_n : hányszorosára változik a részvény árfolyama az n -edik évben \Rightarrow
 $X_n = Y_1 \dots Y_n$ és $EX_n = EY_1 \dots EY_n = 1,2^n \Rightarrow EX_n \rightarrow +\infty$
Egy tipikus HUNCUT részvényárváltozás

Példa folytatása



ábra: A HUNCUT részvény eloszlása

Példa folytatása

$$X_n = \exp \{ \ln Y_1 + \cdots + \ln Y_n \}.$$

Nagy számok erős törvénye \Rightarrow

$$\frac{\ln Y_1 + \cdots + \ln Y_n}{n} \rightarrow E(\ln Y_1) = \frac{1}{2} \ln(0,95) < 0 \quad (1 \text{ valószínűséggel}).$$

$$\Rightarrow X_n = \left(\exp \left\{ \frac{\ln Y_1 + \cdots + \ln Y_n}{n} \right\} \right)^n \rightarrow 0 \quad (1 \text{ valószínűséggel}).$$

Előző példa folytatása

Minden év végén tőként felét a HUNCUT részvénybe fektetjük, a másik felét azonban párnánk alatt készpénzben tartjuk.

Z_n : tőkénk n év múlveli értéke. Tőkénk várható éves hozama $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 190\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 50\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%) - 100\% = 10\%$.

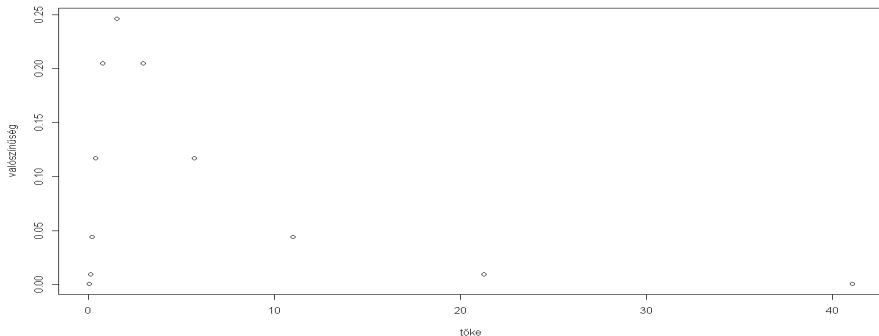
U_n : hányszorosára változik a részvény árfolyama az n -edik évben.

$Z_n = U_1 \dots U_n$ és $EZ_n = EU_1 \dots EU_n = 1, 1^n \rightarrow +\infty$

Tőkeváltozás új stratégiával

Példa folytatása

Tőke eloszlása 10 év után (óvatosabb befektetési politikával)



ábra: Tőkénk eloszlása, ha mindig csak a felét fektetjük be a HUNCUT részvénybe

Példa folytatása

$$Z_n = \exp \{ \ln U_1 + \cdots + \ln U_n \}.$$

$\frac{\ln U_1 + \cdots + \ln U_n}{n} \rightarrow E(\ln U_1) = \frac{1}{2} \ln(1,45 \cdot 0,75) > 0$ (1 valószínűséggel). \Rightarrow

$$Z_n = \exp \left(\frac{\ln U_1 + \cdots + \ln U_n}{n} \right)^n \rightarrow +\infty \text{ (1 valószínűséggel)}$$