

Valószínűségszámítás és Statisztika

9. előadás
2021. április 27.

Hipotézisvizsgálat

- H_0 nullhipotézis (jelezni akarjuk, ha nem igaz)
 $\theta \in \Theta_0$.
- H_1 ellenhipotézis $\theta \in \Theta_1$.
- Elsőfajú hiba: H_0 igaz, de elutasítjuk
- Másodfajú hiba: H_0 hamis, de elfogadjuk

Lehetséges döntések táblázata

		Aktuális helyzet	
		A nullhipotézis igaz	A nullhipotézis hamis
Döntés :	Elfogadjuk a nullhipotézist	Helyes döntés	Másodfajú hiba
	Elutasítjuk a nullhipotézist	Elsőfajú hiba	Helyes döntés

Alapfogalmak

- Emlékeztető: \mathbf{X} mintatér: a minta lehetséges értékeinek halmaza.
- $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e \cup \mathbf{X}_k$
- \mathbf{X}_k : azon lehetséges értékek halmaza, amelyek megfigyelése esetén elutasítjuk a nullhipotézist.
- Gyakran statisztika segítségével határozzuk meg:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \mathbf{x} \in \mathbf{X}_k \\ 0 & , \mathbf{x} \notin \mathbf{X}_k \end{cases}$$

Elsőfajú hiba valószínűsége

α a próba terjedelme, ha minden $\mathcal{G} \in \Theta_0$ -ra

$$P_{\mathcal{G}}(\xi \in X_k) \leq \alpha$$

α a próba szignifikanciaszintje

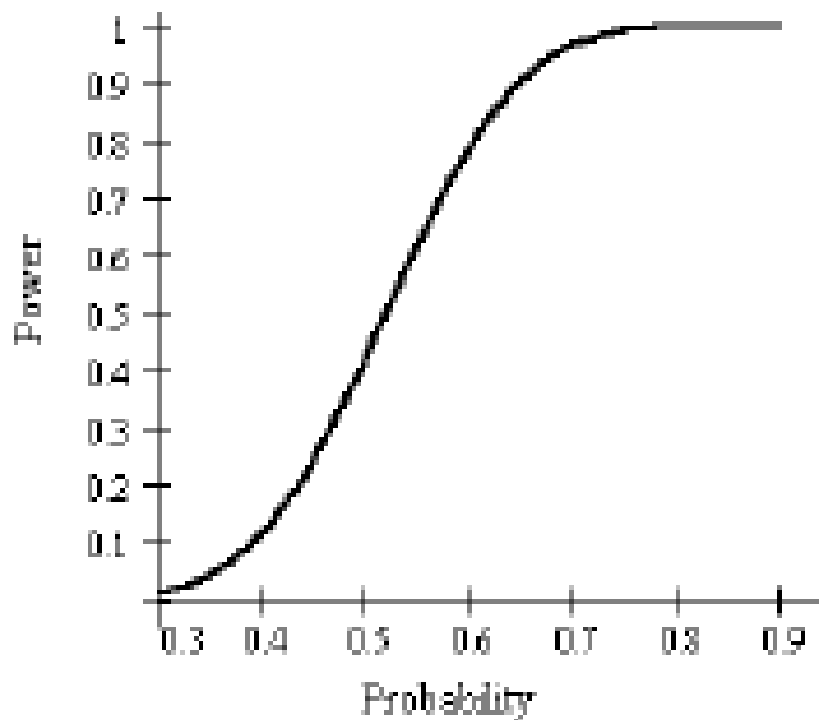
(másképp: a próba pontos terjedelme),

$$\sup_{\mathcal{G} \in \Theta_0} P_{\mathcal{G}}(\xi \in X_k) = \alpha$$

Erőfüggvény

A próba erőfüggvénye

$$\beta(\vartheta) = P_{\vartheta}(\xi \in X_k) = 1 - P_{\vartheta}(\xi \in X_e), \vartheta \in \Theta_1$$



Próbák a normális eloszlás várható értékére: u-próba.

- $H_0: m = m_0$, $H_1: m \neq m_0$. Ha ismert a szórás (u-próba):

$$U = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma}$$

- Kritikus tartomány: $|u| > u_{1-\alpha/2}$. ($u_{1-\alpha/2}$ a standard normális eloszlás $1 - \alpha/2$ kvantilise)
- Ha egyoldali az ellenhipotézis, akkor a kritikus tartomány $u > u_{1-\alpha}$ ($m > m_0$), illetve $u < -u_{1-\alpha}$ alakú ($m < m_0$). Ezek legerősebb próbák!

Próbák a normális eloszlás várható értékére: t próba.

- $H_0: m = m_0, H_1: m \neq m_0$. Ha nem ismert a szórás (t-próba):

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - m_0}{\hat{\sigma}}$$

- ahol

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)}$$

- Kritikus tartomány: $|t| > t_{1-\alpha/2, n-1}$.
- H_0 esetén a próbastatisztika $n-1$ szabadságfokú, t-eloszlású.

Megjegyzések

- Ha egyoldali az ellenhipotézis, akkor a kritikus tartomány

$$t > t_{1-\alpha, n-1} (m > m_0),$$

- illetve

$$t < -t_{1-\alpha, n-1} \text{ alakú } (m < m_0).$$

Megjegyzések

- Ezek is legerősebb próbák!
- A kétoldali esetre kapott próba nem a legerősebb (ilyenkor nincs is ilyen).
- Ha a minta elemszáma nagy, a t-próba helyett az u-próba is használható (ekkor még a normális eloszlásúságra sincs szükség a centrális határeloszlás tétel miatt).

Példa

- A butitizmus elleni védőoltás hatásos, ha az oltás után 2 héttel az antitestek száma meghaladja az 5 purc szintet.
- 37 beteget oltottak be. 2 héttel az oltás után az átlagos antitest szintjük 5,7 purc volt, a mérések korrigált tapasztalati szórása pedig 1,3 volt.
- Hatásos-e az oltás?

Példa (folyt.)

- Ez így nem jó! Kellenének az egyedi adatok!
- Feltételezzük, hogy $X_1, X_2, \dots, X_{37} \sim N(m, \sigma^2)$
- $H_0: m = 5, H_1: m > 5$
- $t = \sqrt{37} \frac{5,7-5}{1,3} = 3,275334$
- $t_{1-5\%.37-1} = 1,688298$
- $P(t_{36} < 3,275334) = 0,9988308$

Kétoldali próbák és konfidencia intervallumok

- A normális eloszlásnál a várható értékre vonatkozó α terjedelmű próbánál láttuk, hogy a

$$H_0: m = m_0$$

hipotézist a

$$H_1: m \neq m_0$$

hipotézissel szemben pontosan akkor fogadjuk el, ha m_0 benne van az $1 - \alpha$ megbízhatóságú konfidencia intervallumban.

Kétmintás eset: párosított megfigyelések

- Példa: Van-e különbség Budapest és Cegléd napi átlaghőmérséklete között?

$H_0: m_1 = m_2$ a nullhipotézis.

- Ha ugyanazon napokról van megfigyelésünk mindkét helyen: nem függetlenek a minták. Ekkor a párok tagjai közötti különbséget vizsgálva, az előző egymintás esetre vezethető vissza a feladat.

$H_0^* : m = 0, H_1^* : m \neq 0$ az új hipotézisek.

Kétmintás eset: független minták

Ha ismert a szórás: (X n elemű, σ_1 szórású, Y k elemű, σ_2 szórású), alkalmazható a kétmintás u -próba

$$u = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/k}}$$

Kritikus tartomány: mint az egymintás esetben

Ha ismeretlenek, de azonosak a szórások:

$$t_{n+k-2} = \sqrt{\frac{nk(n+k-2)}{n+k}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2 + \sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

A szórás vizsgálata kétmintás esetben: F-próba

- $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$
- Két független, n , illetve k elemű normális eloszlású minta alapján a próbastatisztika:
(a korrigált tapasztalati szórásnégyzetek hányadosa)
$$F = \max\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}, \frac{s_2^2}{s_1^2}\right)$$
- Kritikus érték: az $n - 1, k - 1$ szabadságfokú F eloszlás $1 - \alpha/2$ kvantilise
(n a számlálóbeli, k pedig a nevezőbeli minta elemszáma).

Kétmintás t-próba ismét

- Alkalmazható, ha az F-próba elfogadja a szórások azonosságát.
- Ha nem, akkor Welch-próba:

$$t' = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2}}$$

- H_0 esetén közelítőleg t eloszlású f szabadságfokkal, ahol

$$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{n-1} + \frac{(1-c)^2}{m-1} \quad c = \frac{s_1^2 / n}{s_1^2 / n + s_2^2 / m}$$

χ -négyzet próba

- H_0 hipotézis: az A_1, A_2, \dots, A_r teljes eseményrendszerre teljesül $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_r) = p_r$

- A tesztstatisztika:
$$\sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}$$

ami aszimptotikusan $r - 1$ szabadságfokú χ -négyzet eloszlású, ha igaz a nullhipotézis.

- Kritikus tartomány: ha a statisztika értéke nagyobb, mint az $r - 1$ szabadságfokú χ -négyzet eloszlás $1 - \alpha$ kvantilise, elutasítjuk a nullhipotézist.

χ -négyzet próba (folytatás)

- Miért is ez a határeloszlás?

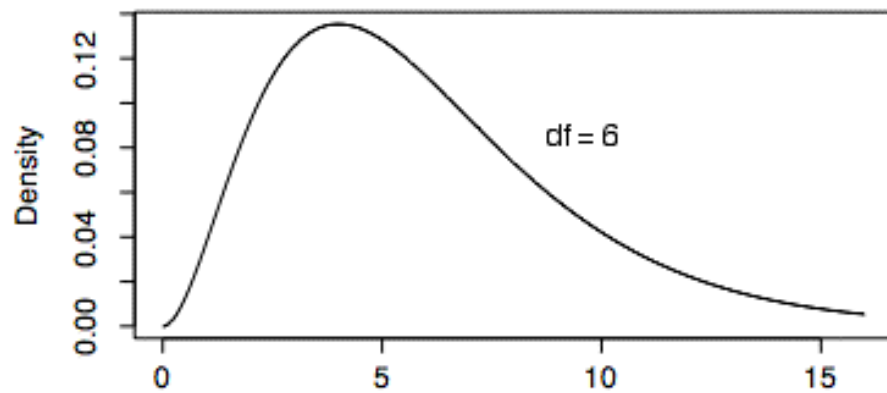
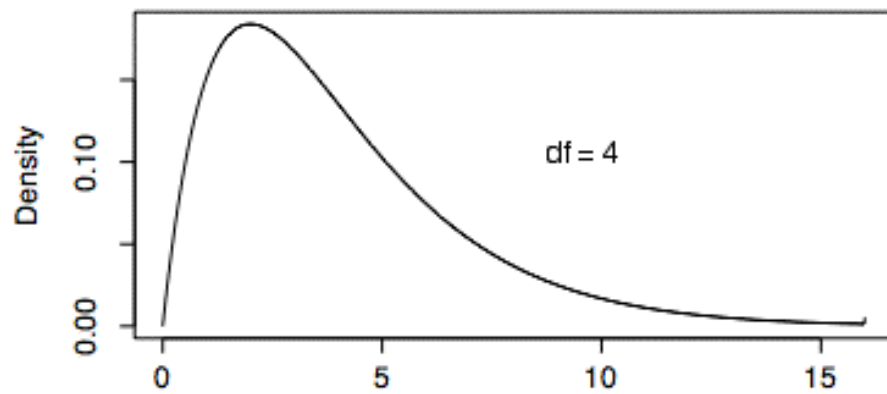
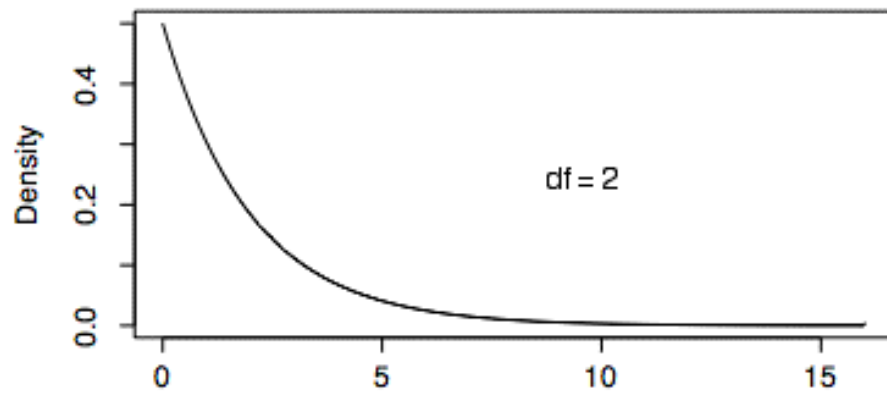
$r = 2$, $H_0 : P(A) = p$, $\nu : A$ gyakorisága n kísérletből

$$\chi^2 = \frac{(\nu - np)^2}{np} + \frac{((n - \nu) - n(1 - p))^2}{n(1 - p)} = \frac{(\nu - np)^2}{np} + \frac{(\nu - np)^2}{n(1 - p)} = \frac{(\nu - np)^2}{np(1 - p)}$$

$\xi_i = 1$, ha az i .kísérletnél A bekövetkezik, 0 különben

$$\nu = \sum_{i=1}^n \xi_i, E\xi_i = p, D^2\xi_i = p(1 - p),$$

$$\chi^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty, \text{eloszlásban}} \chi_1^2$$



Chi Square

Példa (kockadobás)

- 36 kockadobás eredménye

Szám	Megfigyelt	np_i	$\frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}$
1	8	6	0.667
2	5	6	0.167
3	9	6	1.500
4	2	6	2.667
5	7	6	0.167
6	5	6	0.167

$$n = 36, r = 6$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi_5^2$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = 5.333$$

$$P(\chi_5^2 > 5.333) = 0.377 \Rightarrow$$

Nem tudjuk a szabályosság hipotézisét elutasítani!

Példa (számítógépek népszerűsége)

- 100 amerikai diák

Számítógép	Megfigyelt	np_i	$\frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}$
IBM	47	33.333	5.604
Macintosh	36	33.333	0.213
Egyéb	17	33.333	8.003

$$n = 100, r = 3$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi_2^2$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = 13.820$$

$$P(\chi_2^2 > 5.99) = 0.05 \Rightarrow$$

Elutasítjuk az egyforma kedveltség hipotézisét!

χ -négyzet próba illeszkedésvizsgálatra

- Illeszkedésvizsgálat:

$H_0 : \xi_1, \dots, \xi_n \text{ } F \text{ eloszlásfüggvényűek}$

- o Visszavezetjük az előző esetre

$$A_i = \{\xi \in C_i\}, i = 1, 2, \dots, r, \bigcup_i C_i = \mathbf{R}$$

Diszkrét esetben gyakran: $A_i = \{\xi = x_i\}, i = 1, 2, \dots, r$

Példa

- Mi lehet egy vezető által okozott károk számának eloszlása?
- Poisson eloszlású-e?

Kár- szám	0	1	2	3	4	5	6	7	>7	Össze- sen
Veze- tők száma	129524	16267	1966	211	31	5	1	1	0	148006

Becsléses χ -négyzet próba

- H_0 hipotézis: az A_1, A_2, \dots, A_r teljes eseményrendszerre teljesül:

$$P(A_i) = p_i(\vartheta_1, \dots, \vartheta_s), i = 1, 2, \dots, r$$

$\vartheta_1, \dots, \vartheta_s$ ismeretlen paraméterek.

A tesztstatisztika:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi_{r-s-1}^2,$$

ahol

$$\hat{p}_i = p_i(\hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_s).$$

Példa (folyt.)

Kár- szám	0	1	2	3	4	5	6	7	>7	Össze- sen
Veze- tők száma	129524	16267	1966	211	31	5	1	1	0	148006
np_i <i>Poisson</i>	128 433	18 218	1 292	61	2,2	0,06	0,001	3E-05	5E-07	
Np_i <i>Neg. bin.</i>	129 541	16 237	1 962	234	28	3,3	0,39	0,05	0,006	

$$n = 148006, r = 5$$

$$A_i = \{\xi = i\}, i = 0, 1, 2, 3$$

$$A_4 = \{\xi \geq 4\}$$

Poisson eset:

$$\hat{\lambda} = 0.709$$

$$\sum_{i=0}^4 \frac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \sim \chi_{5-1-1}^2$$

$$\sum_{i=0}^4 \frac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} > 200$$

$$P(\chi_3^2 > 17.7) = 0.05\% \Rightarrow$$

Elutasítjuk Poisson eloszlás hipotézisét!