Valószínűségszámítás
1. előadás

Arató Miklós

Esély

Várható

Kockázat

Véletlen

Hiba

Előrejelzés

ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Követelmények

- 2 kis zh. előadás anyagából
- 2 zh. gyakorlat anyagából
- Teams és Canvas használata

- Diák, ajánlott irodalom, stb:

https://amiklos.web.elte.hu/Oktatas/2022tavasz/Valszam2022tavasz.htm

Hagyományosan

Egy kis történelem

- Ókorról semmit sem tudunk
- Fermat és Pascal levelezése (1654)
- Jakob Bernoulli: nagy számok törvénye (XVII. század vége)
- Bayes-formula (1763)
- Laplace: Théorie analitique des probabilités (1812)
- Kolmogorov: axiómák (1933)

Klasszikus valószínűségi mező

- Esemény valószínűsége:

"kedvező" esetek száma/összes esetek száma

- Ω: alaphalmaz, biztos esemény (ebben az esetben véges)
- $\omega \in \Omega$: elemi esemény
- $A \subseteq \Omega$: esemény
- $P(A) := |A| / |\Omega|$

Példák 1.

- A valószínűségszámítási példák gyakran köznapi nyelven vannak megfogalmazva.
- Óvatosan alkalmazzuk a klasszikus valószínűségi mezőt!
- Egyszer dobunk fel egy érmét. Mennyi a valószínűsége, hogy fejet dobunk?
- $\Omega=\{F,I\}$, $P(\text{fejet dobunk})=P(F)$
- Jó-e itt a klasszikus mező?
- Szabályos érme esetében igen.

Példák 2.

- 2 lovag addig játszik, amíg az egyik 6 játékot nem nyer. A játékok igazságosak mindkét lovagnak ugyanannyi az esélye a nyerésre.
- Amikor az első lovag már 5 játékot nyert, a másik csak 3-at, akkor a várat megtámadják. Milyen arányban igazságos megosztani a tétet?
- 5:3, 3:1, 7:1 vagy 1:0 arányban?
- Legyen a nyerési valószínűség arányában.

Példák 2. (folyt.)

- Nézzük meg, hogy mi történhet a következő 3 játékban!
- Ω={111; 112; 121; 122; 211; 212; 221; 222}
- Második játékos csak a {222} esetben nyeri meg a tétet.
- P(1. nyeri a tétet)=7/8.

Példák 3. (de Méré lovag másik problémája)

Minek van nagyobb esélye? Annak, hogy egy szabályos kockát háromszor feldobva az eredmény 11, vagy annak, hogy az eredmény 12.

de Méré lovag így érvelt: 11-et kapunk, ha

6,4,1; 6,3,2; 5,5,1; 5,4,2; 5,3,3; 4,4,3

12-öt ha

6,5,1; 6,4,2; 6,3,3; 5,5,2; 5,4,3; 4,4,4

a dobások eredménye. Tehát mindkét lehetőség ugyanolyan eséllyel következik be. Mi a "hiba" de Méré lovag érvelésében?

Mi az „összes eset"?

- r=6 golyót teszünk N=8 dobozba. Mennyi a valószínűsége, hogy k=2 golyó kerül az első dobozba?

Maxwell-Boltzmann statisztika

- $\Omega = \{(i_1, \dots, i_r): 1 \leq i_j \leq N\}$
- Összes esetszám: $|\Omega| = N^r = 8^6$
- „Kedvező" esetek száma:
$$\binom{r}{k}(N-1)^{r-k} = \binom{6}{2}(8-1)^{6-2}$$
- *A valószínűség*: $13{,}74\%$

Bose-Einstein statisztika

- $\Omega = \{(j_1, \dots, j_N): 0 \leq j_l, j_1 + \cdots + j_N = r\}$

- Összes esetszám: $\binom{r+N-1}{N-1} = \binom{6+8-1}{8-1}$

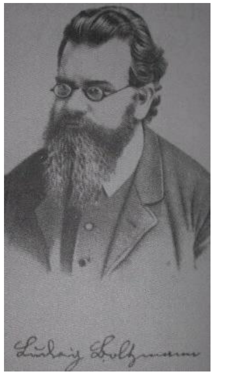
- „Kedvező" esetek száma:

$$\binom{r-k+N-2}{N-2} = \binom{6-2+8-2}{8-2}$$

- Valószínűség: 12,24%

Melyik az igazi?

- Maxwell–Boltzmann statisztika: a statisztikus mechanikában alkalmazható a gázmolekulák rendszereire



- Bose–Einstein statisztika: fotonrendszerek

Geometriai valószínűségi mező

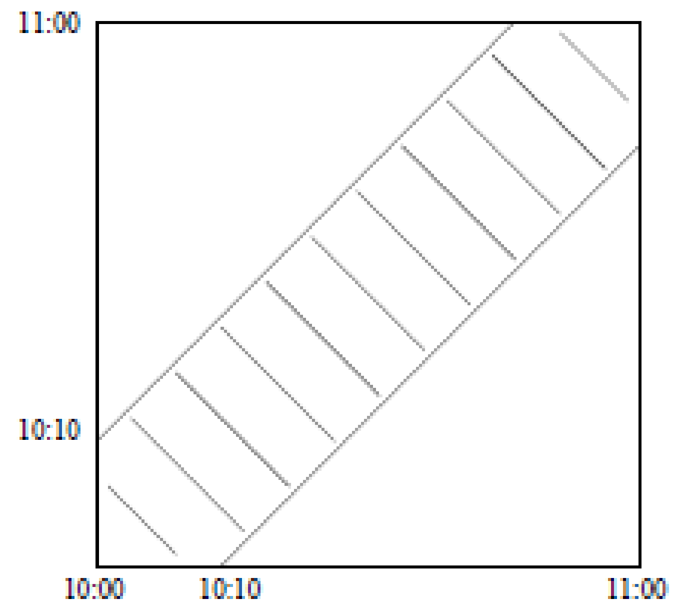
- Esemény valószínűsége:

Esemény térfogata/teljes térfogat

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$: alaphalmaz, biztos esemény (ebben az esetben véges térfogatú)
- $\omega \in \Omega$: elemi esemény
- $A \subseteq \Omega$: esemény (olyan aminek "van térfogata")
- $P(A) := |A| / |\Omega|$

Példák 1.

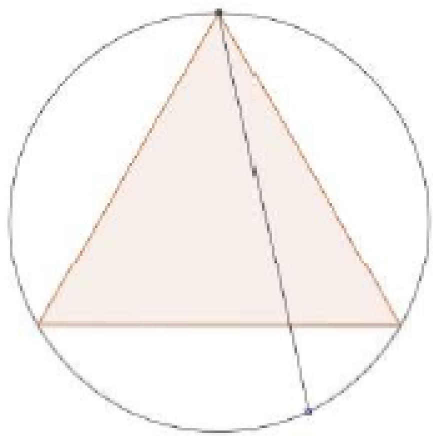
- Péter és Juli 10 és 11 óra között találkoznak, legfeljebb 10 percet várva a másikra. Mekkora valószínűséggel találkoznak?



- P(találkoznak)=1-P(nem találkoznak)=11/36

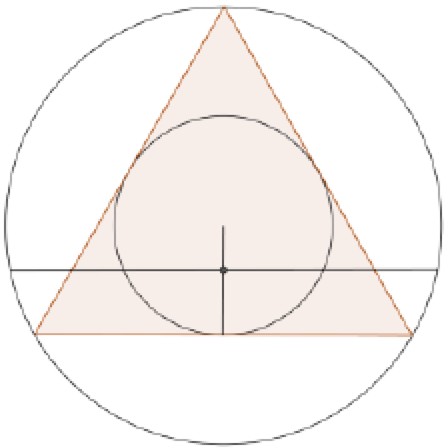
Példa 2.

- Mekkora valószínűsége, hogy egy körbe húzott húr hossza nagyobb a körbe írt szabályos háromszög oldalhosszánál?

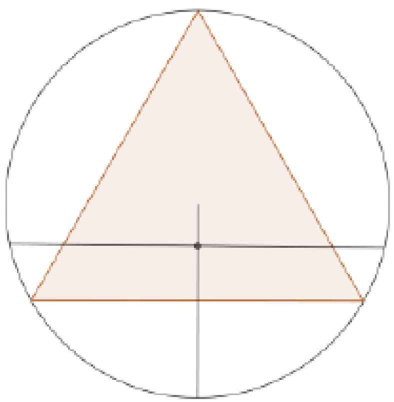


- A keresett valószínűség: $\dfrac{\frac{2r\Pi}{3}}{2r\Pi} = \dfrac{1}{3}$

Példa 2. (folyt.)



- A valószínűség: $\dfrac{\left(\frac{r}{2}\right)^2 \Pi}{r^2 \Pi} = \dfrac{1}{4}$



- A valószínűség:

$$\frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}$$

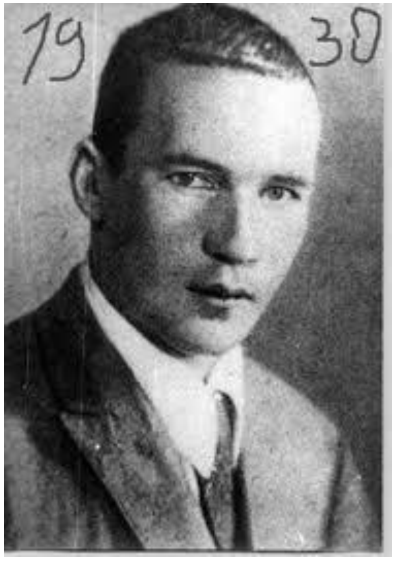
Bertrand-féle paradoxon

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, ha
- Ω : alaphalmaz, $\omega \in \Omega$: elemi esemény
- $\mathcal{A}$: Ω részhalmazaiból áll és teljesül rá, hogy
  - $\Omega \in \mathcal{A}$
  - $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
  - $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A}$: esemény

Kolmogorov-féle valószínűségi mező (folyt.)

- P: valószínűség. Teljesül, hogy
  - $P: \mathcal{A} \to [0,1]$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset \; i \neq j \Rightarrow$
    $$P(\cup A_n) = \sum P(A_n)$$



Egy egyszerű lemma

- **Jelölés:** $A \cap B = AB$
- **Lemma:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- **Bizonyítás:**

$A \cup B = A \cup \bar{A}B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B)$.
Továbbá

$B = AB \cup \bar{A}B \Rightarrow P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$, amiből
$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$.

Poincaré-formula

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ események. Ekkor egyesítésük valószínűsége:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)},$$

ahol

$$S_k^{(n)} = \sum_{1<i_1<\dots<i_k} P\left(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\right)$$

Poincaré-formula bizonyítása

Teljes indukcióval.

$n = 2$ pont az előző lemma. n–re igaz.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) =$$

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_{n+1}) - P(A_1 A_{n+1} \cup \ldots \cup A_n A_{n+1}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) + .$$

$$+ P(A_{n+1}) - \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+1} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_l \le n} P(A_{j_1} \ldots A_{j_l} A_{n+1}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n+1} P(A_{i_1} \ldots A_{i_k})$$

Emberek és esernyők

Emberek és esernyők

Egy fogadáson *n* ember vesz részt, mindenki-nek van esernyője, amik a ruhatárban véletle-nül összekeverednek. Mi a valószínűsége, hogy lesz olyan vendég aki a sajátját kapja vissza?

$|\Omega| = n!, A_i$: i–edik ember a sajátját kapja meg

Kérdés: $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = ?$

$$P\left(A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right) = \frac{(n-k)!}{n!} \Rightarrow$$

$$S_k^{(n)} = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!} \Rightarrow$$

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!} \to 1 - \frac{1}{e}$$

Megoldás

- A_i: $i -$ edik típusú figura nincs meg (50 figuránk van)
- Kérdés: $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{24})$=?
- $P\left(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\right) = \frac{(24-k)^{50}}{24^{50}}$
- $S_k^{(n)} = \binom{24}{k}\left(\frac{24-k}{24}\right)^{50}$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{24}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{24}{k}\left(\frac{24-k}{24}\right)^{50} = 0{,}9737209$

Feltételes valószínűség

- Amennyiben $P(B) > 0$, akkor az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűsége:
$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$
- Kombinatorikus valószínűségi mező esetén:

$$P(A|B) = \frac{\frac{|AB|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|AB|}{|B|}$$