Bevezetés

Egy számegyenesen lépegetünk az egészeken 0-ból kiindulva, minden lépésben ugyanakkora eséllyel lépünk balra, mint jobbra.

Figure: Bolyongás a számegyenesen

Tulajdonságok

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlásúak:

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Ekkor a helyzetünk n lépés után:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

Mit tanultunk eddig S_n-ről?

1. $$E\xi_i = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 0,\, D^2\xi_i = E(\xi_i^2) = 1 \Rightarrow ES_n = 0,\, D^2(S_n) = n.$$
2. Teljes valószínűség tétel $\Rightarrow$

$$P(\exists n \geq 1 : S_n = 0) = 1$$

Tulajdonságok (folyt.)

3. Teljes várható érték tétel $\Rightarrow$

$$\tau = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\} \Rightarrow E\tau = \infty$$

4. Nagy számok erős törvénye $\Rightarrow$

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \text{ 1 valószínűséggel}$$

5. Csebisev-egyenlőtlenség $\Rightarrow$

$$P(S_n \geq cn) \leq \frac{n}{c^2 n^2} = \frac{1}{c^2 n}$$

6. CHT $\Rightarrow$

$$P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < x) \to \Phi(x) \Rightarrow P(y\sqrt{n} < S_n < x\sqrt{n}) \to \Phi(x) - \Phi(y)$$

Tulajdonságok (folyt.)

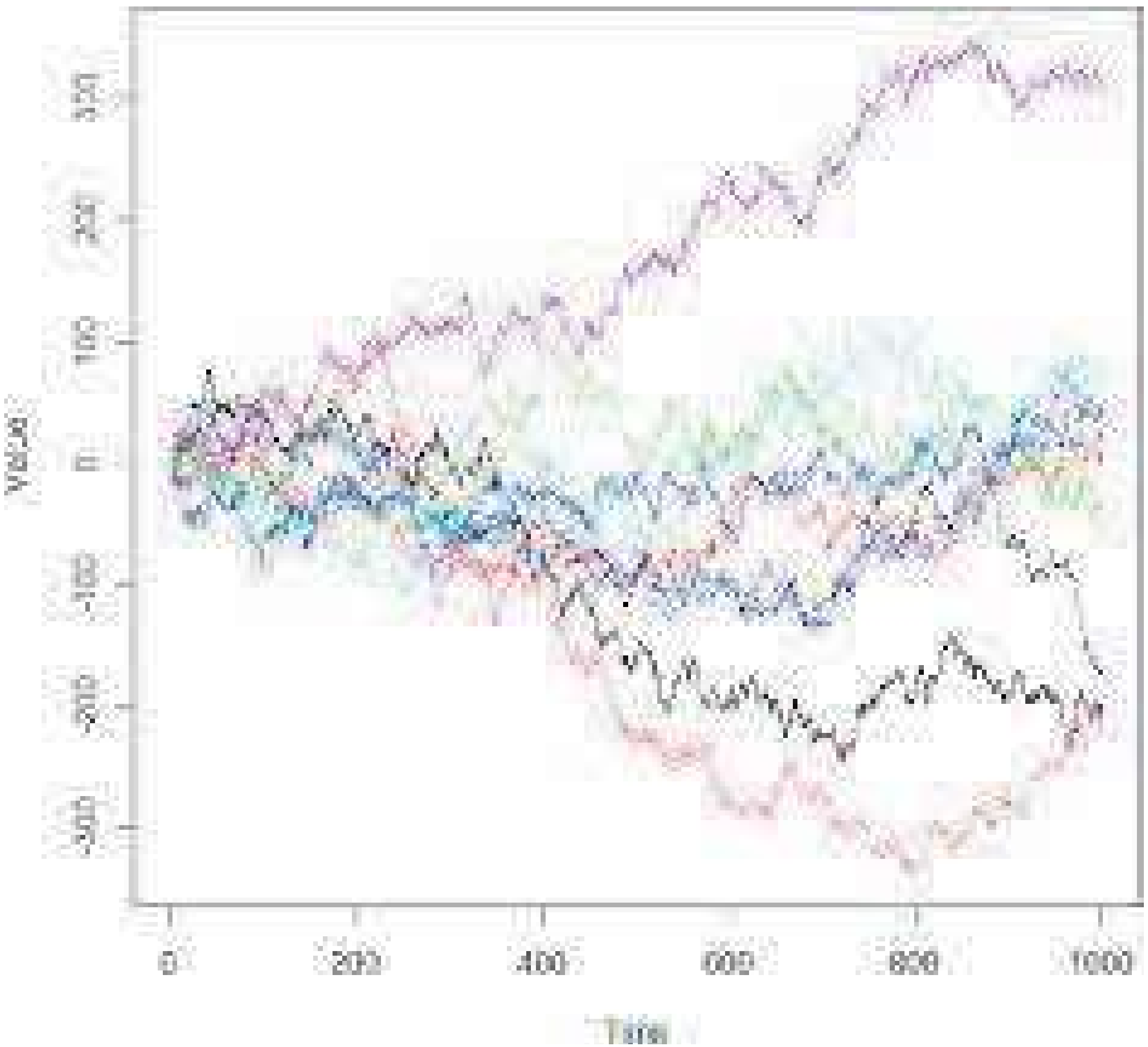
7. Moivre-Laplace lokális tétel $\Rightarrow$

$$\tilde{\xi}_i = \frac{\xi_i + 1}{2} \Rightarrow P(\tilde{\xi}_i = 0) = P(\tilde{\xi}_i = 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{S}_n = \sum_{i_1}^{n} \tilde{\xi}_i \sim B(n, \frac{1}{2})$$

$$P(S_n = k) = P\left(\tilde{S}_n = \frac{k+n}{2}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n \frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{k+n}{2} - \frac{n}{2}\right)^2}{2n\frac{1}{4}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right), \text{ ha } -A\sqrt{n} \le k \le A\sqrt{n}$$

Trajektóriák



Pontos valószínűségek

Legyen $0 \leq k \leq n$-ra

$u_{2k} = P(S_{2k} = 0)$, $f_{2k} = P(S_2 \neq 0, \ldots, S_{2k-2} \neq 0, S_{2k} = 0) = P(\tau = 2k)$

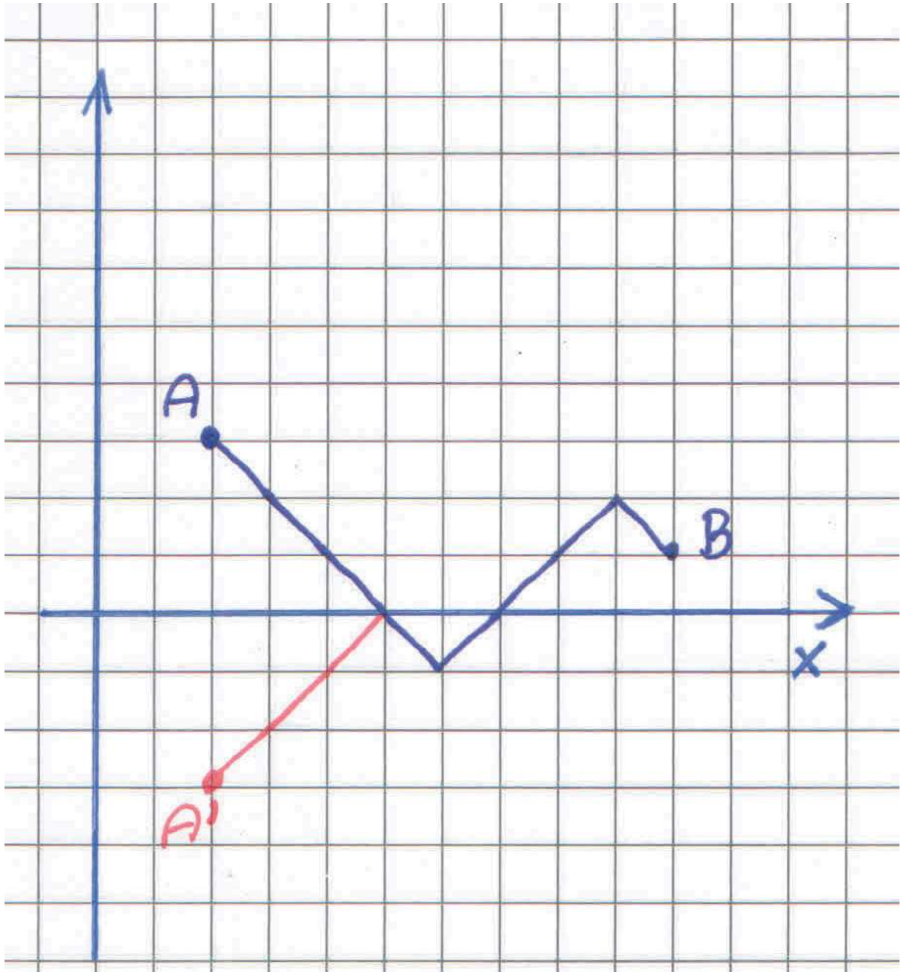
Nyilvánvaló, hogy

$$u_{2k} = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$$

Állítás: $f_{2k} = \frac{u_{2(k-1)}}{2k} = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k2^{2k-1}}$
Biz.: $f_{2k} = 2P(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 0)$
A, B egész koordinátájú pontok az $x \geq 0$ félsíkon. A-ból B-be vezető út: olyan trajektória, melyet a véletlen bolyongás be tud járni.
Tükrözési elv: legyen A és B az x tengely azonos oldalán lévő két pont. Jelölje A' az A tükörképét az x tengelyre. Ekkor az A- ból B-be vezető azon utak száma, amelyeknek az x tengellyel van közös pontjuk, megegyezik az A'-ből B-be vezető utak számával.

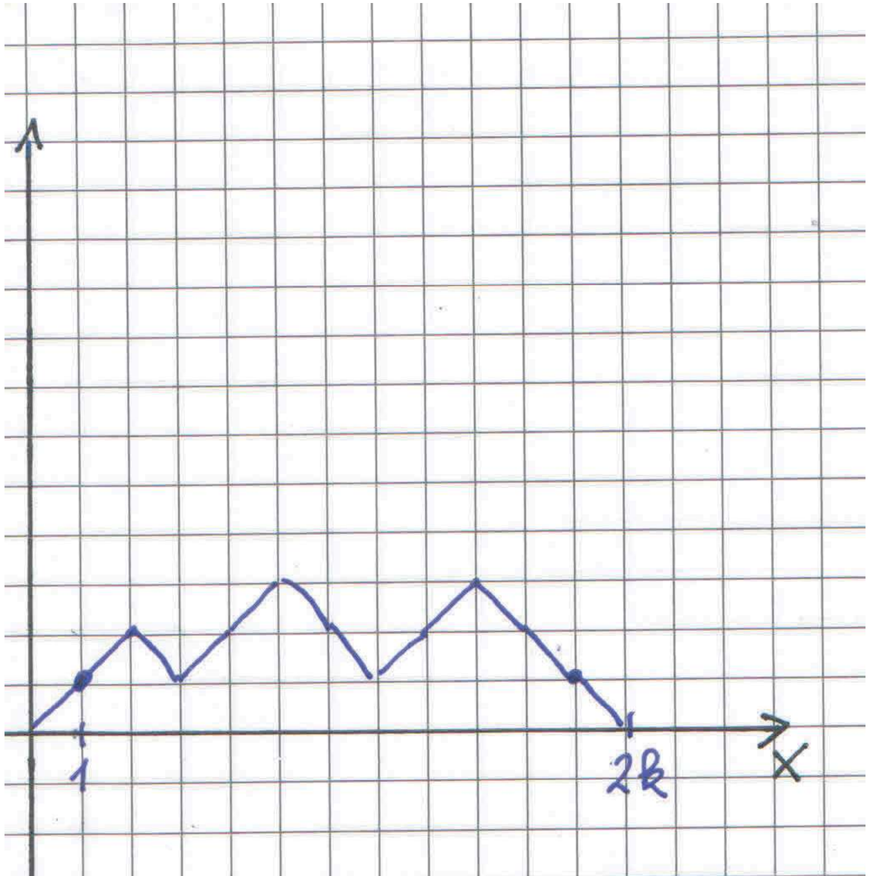
Tükrözési elv bizonyítása

Az $A \to B$ tengelyt metsző útnál tükrözzük az x tengelyre az első metszéspontig terjedő szakaszt. Így egy $A' \to B$ utat kapunk. A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, tehát a két típusú utak száma azonos.



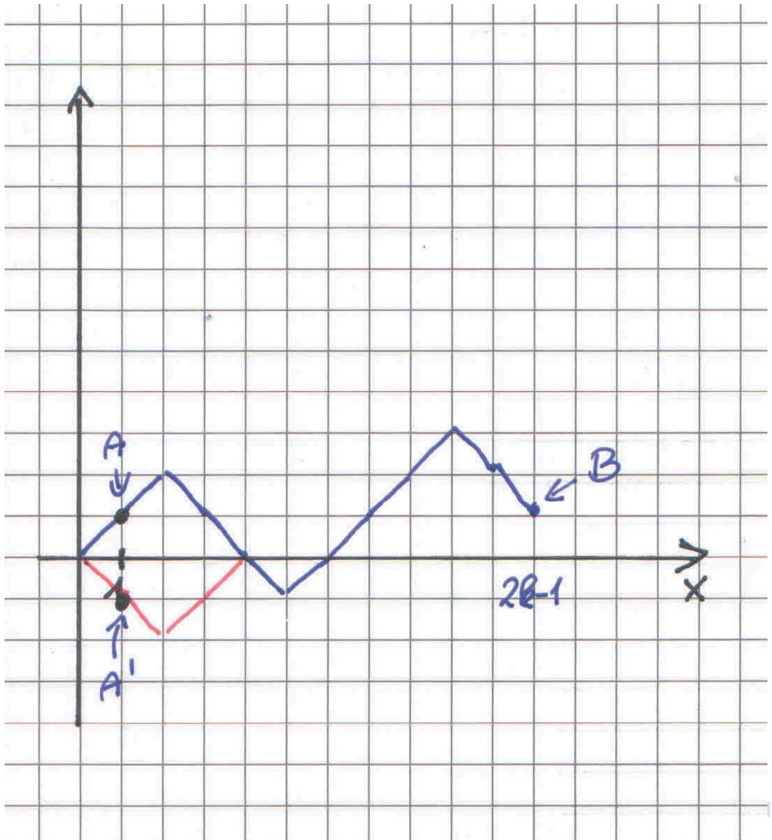
Állítás bizonyításának folytatása

$$P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 0) =$$
$$= \frac{x \text{ tengelyt nem érintő utak száma } (1,1)\text{-ből } (2k-1,1)\text{-be}}{2^{2k}}$$



Állítás bizonyításának folytatása

$$\{x \text{ tengelyt nem érintő utak száma } (1,1)\text{-ből } (2k-1,1)\text{-be}\} =$$
$$\{\text{utak száma } (1,1)\text{-ből } (2k-1,1)\text{-be}\}$$
$$-\{x \text{ tengelyt érintő utak száma } (1,1)\text{-ből } (2k-1,1)\text{-be}\}$$



Állítás bizonyításának folytatása

$$f_{2k} = 2\frac{\binom{2k-2}{k-1} - \binom{2k-2}{k}}{2^{2k}} = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k2^{2k-1}}$$