Valószínűségszámítás

2. előadás

Arató Miklós

2022.02.14.

Tartalomjegyzék

1. Feltételes valószínűség
2. Teljes valószínűség tétele
3. Függetlenség
4. Véletlen bolyongás
   - Tönkremenés
   - Szimmetrikus bolyongás

Meghatározás

Definíció: Amennyiben $P(B) > 0$, akkor az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűsége:

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Kombinatorikus valószínűségi mező esetén:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{|AB|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|AB|}{|B|}$$

Megjegyzés

Amennyiben $P(B) > 0$, akkor

$$(\Omega, \mathcal{A}, P(.|B))$$

is Kolmogorov féle valószínűségi mező lesz.

$\Rightarrow$

A "normál" valószínűségre bizonyítottak a feltételes valószínűségre is teljesülnek.

Az ügyvédnek vagy ügyésznek volt igaza ?

Nicole Brown-t 1994 ben gyilkolták meg. Férjét, O.J. Simpsont, gyanúsították meg.
Az ügyész külön hangsúlyozta, hogy Simpson korábban már bántalmazta feleségét.
Az ügyvéd válaszában arra hivatkozott, hogy a statisztikák szerint "csak" minden 100-adik bántalmazó férj öli meg feleségét. Valójában a házastársuk/élettársuk által bántalmazottak közül "csak" minden 2500 adikat öli meg házastársuk/élettársuk.

Nicole és O.J.

Az ügyvédnek vagy ügyésznek volt igaza ?

Valójában a helyes kérdés az, hogy milyen valószínűséggel ölte meg a feleségét a férj, ha a feleséget megölték és ő korábban bántalmazta a feleséget.

1/20000 annak az esélye, hogy valakit megölnek az USA ban.

Csak a bántalmazottak körét tekintjük.

B: férj öli meg, C: nem férj öli meg

Kérdés: $P(B|B \cup C) = ?$

$$P(B|B \cup C) = \frac{P(B)}{P(B \cup C)} = \frac{\frac{1}{2500}}{\frac{1}{2500} + \frac{1}{20000}} = \frac{8}{9}$$

Bayes-formula

Tétel: Tegyük fel, hogy $P(B) > 0, 0 < P(A) < 1$. ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P\left(B|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right)}$$

Bizonyítás:

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(BA)}{P(BA) + P(B\overline{A})} = \frac{\frac{P(BA)}{P(A)}P(A)}{\frac{P(BA)}{P(A)}P(A) + \frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}P(\overline{A})}$$

Mammográfiás vizsgálat

50 éves nő (tünetek nélkül) rutin mammográfiás vizsgálaton vett részt.
A teszt pozitív lett.
Mennyi a valószínűsége, hogy emlődaganata van?
Adatok:
– 50 éves nőnél emlődaganat valószínűsége 1%
– Emlődaganat felismerésének valószínűsége 90%
– Emlődaganat nélkül pozitív teszt valószínűsége 9%

Melyikhez van közelebb a valószínűség?

1%
10%
90%

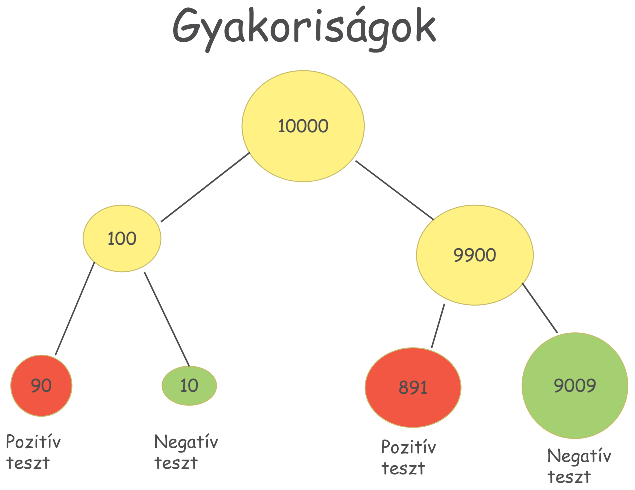
Megoldás

Legyen A : emlődaganata van, B : pozitív a teszt. Ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P\left(B|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0,9 \cdot 0,01}{0,9 \cdot 0,01 + 0,09 \cdot 0,99} =$$

$$= 0,09174312$$

Gyakoriságok



Teljes eseményrendszer

Definíció: $A_1, A_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha $A_i A_j = \emptyset, i \neq j$ és $\bigcup_i A_i = \Omega$.

Teljes valószínűség tétele

Állítás. Legyen $A_1, \dots, A_i, \dots$ teljes eseményrendszer, valamint $P(A_i) > 0$ minden i-re. Ekkor $P(B) = \sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)$.

Teljes valószínűség tétele

Állítás. Legyen $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ teljes eseményrendszer, valamint $P(A_i) > 0$ minden i-re. Ekkor $P(B) = \sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $B = \bigcup_i BA_i$, ezért $P(B) = \sum_i P(BA_i)$.
Alkalmazzuk a $P(B|A_i) \cdot P(A_i) = P(BA_i)$ összefüggést.

Példa. Adott két fiók, az egyikben 1 db húszezer és 9 db ötszáz forintos, a másikban 10 db húszezer forintos. Találomra választva egy fiókot, mi a valószínűsége, hogy húszezer forintost húzunk?

Teljes valószínűség tétele

Állítás. Legyen $A_1, \dots, A_i, \dots$ teljes eseményrendszer, valamint $P(A_i) > 0$ minden i-re. Ekkor $P(B) = \sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $B = \bigcup_i BA_i$, ezért $P(B) = \sum_i P(BA_i)$.
Alkalmazzuk a $P(B|A_i) \cdot P(A_i) = P(BA_i)$ összefüggést.

Példa. Adott két fiók, az egyikben 1 db húszezer és 9 db ötszáz forintos, a másikban 10 db húszezer forintos. Találomra választva egy fiókot, mi a valószínűsége, hogy húszezer forintost húzunk? A teljes valószínűség tétele szerint
$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$,
ahol B_i az i-edik fiók választását jelöli, A pedig azt, hogy húszezer forintost húzunk.

Szindbád és a háremhölgyek

Szindbád a szultánnak tett szolgálataiért cserében 100 háremhölgy közül választhat. Azonban a háremhölgyeket nem egyszerre, hanem sorban egymás után mutatják be neki. Amennyiben egy bemutatott hölgyet nem választ ki azonnal, úgy már az örökké elveszik számára. Milyen stratégiát válasszon Szindbád, hogy a legszebb választásának minél nagyobb legyen a valószínűsége?

Szindbád és a háremhölgyek (folyt.)

Szindbád azt a stratégiát választja, hogy elengedi az első m hölgyet, és az utána következők közül az addigi legszebbet választja. Mennyi az optimális m?

Szindbád és a háremhölgyek (folyt.)

Szindbád azt a stratégiát választja, hogy elengedi az első m hölgyet, és az utána következők közül az addigi legszebbet választja. Mennyi az optimális m?
Legyen A : a legszebbet választja, B_k : a k. hölgyet választja, B_0 : egyiket sem választja.
$B_0, B_{m+1}, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer, így
$P(A) = 0 + \sum_{k=m+1}^{n} P(AB_k)$.
A hölgyek lehetséges sorrendjei: $|\Omega| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$
Mennyi AB_k elemszáma?
Az első m helyen tetszőleges lehet a sorrend. Az $m+1$-edik hölgytől kezdve a $k-1$-ig a hölgyek nem lehetnek az addigi legszebbek. A k. hölgy a legszebb, a $k+1$-edik hölgytől kezdve a hölgyek csúnyábbak a k-adiknál. $\Rightarrow$

Szindbád és a háremhölgyek (folyt.)

$$|AB_k| = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m \cdot m \cdot (m+1) \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot 1 \cdot k \cdot \ldots \cdot (n-1) \Rightarrow$$
$$P(AB_k) = \frac{|AB_k|}{n!} = \frac{m}{(k-1)n} \Rightarrow$$
$$P(A) = \sum_{k=m+1}^{n} P(AB_k) = \frac{m}{n} \cdot \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k-1} = \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Szindbád és a háremhölgyek (folyt.)

$|AB_k| = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m \cdot m \cdot (m+1) \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot 1 \cdot k \cdot \ldots \cdot (n-1) \Rightarrow$
$P(AB_k) = \frac{|AB_k|}{n!} = \frac{m}{(k-1)n} \Rightarrow$

$P(A) = \sum_{k=m+1}^{n} P(AB_k) = \frac{m}{n} \cdot \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k-1} = \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}$. Mivel

$\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k+1} \le \int_m^n \frac{1}{x}\, dx = -\ln \frac{m}{n} \le \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}$, ezért

$-\frac{m}{n} \cdot \ln \frac{m}{n} \le \frac{m}{n} \cdot \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} \le -\frac{m}{n} \cdot \ln \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. Továbbá ha m_n^*-ra

teljesül, hogy $\frac{m_n^*}{n} \cdot \sum_{k=m_n^*}^{n-1} \frac{1}{k} = \max_m \frac{m}{n} \cdot \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}$, akkor belátható,

hogy $\frac{m_n^*}{n/e} \stackrel{n\to\infty}{\to} 1$.

Bayes-formula általános alakja

Állítás. Legyen $A_1, \dots, A_i, \dots$ teljes eseményrendszer, valamint $P(B) > 0, P(A_i) > 0$ minden i-re. Ekkor
$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_i P(B|A_i)P(A_i)}$.

Bayes-formula általános alakja

Állítás. Legyen $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ teljes eseményrendszer, valamint $P(B) > 0, P(A_i) > 0$ minden i-re. Ekkor
$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_i P(B|A_i)P(A_i)}$.

Bizonyítás. $P(A_k|B) = \frac{P(BA_k)}{P(B)} = \frac{\frac{P(BA_k)}{P(A_k)}P(A_k)}{\sum\limits_i P(B|A_i)P(A_i)}$

Monty Hall-paradoxon

Képzeljük el, hogy egy vetélkedőben szerepel, és három ajtó közül kell választania. Az egyik mögött kocsi van, a másik kettő mögött viszont kecske. Tegyük fel, hogy maga a 3. ajtót választja, mire a műsorvezető, aki tudja, melyik ajtó mögött mi van, kinyitja az 1. ajtót, megmutatván, hogy amögött kecske van. Ezután önhöz fordul, és megkérdezi: Nem akarja esetleg mégis a 2. ajtót választani? Vajon előnyére válik, ha vált?

Monty Hall-paradoxon (megoldás)

A_i : i-edik ajtó mögött van a kocsi

$P(A_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$

B : a műsorvezető az első ajtót nyitja ki

Kérdés: $P(A_3|B) = ?$

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

2 esemény függetlensége

Definíció: A és B **függetlenek**, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Megjegyzések

a) Ha $P(A) = 0$, akkor A minden más eseménytől független.

2 esemény függetlensége

Definíció: A és B **függetlenek**, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Megjegyzések

a) Ha $P(A) = 0$, akkor A minden más eseménytől független.

b) Ha $P(B) > 0$, akkor A és B pontosan akkor függetlenek, ha $P(A|B) = P(A)$.

2 esemény függetlensége

Definíció: A és B **függetlenek**, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Megjegyzések

a) Ha $P(A) = 0$, akkor A minden más eseménytől független.

b) Ha $P(B) > 0$, akkor A és B pontosan akkor függetlenek, ha $P(A|B) = P(A)$.

c) Az egymást kizáró események nem függetlenek, azaz $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, $P(AB) = 0$ esetén A és B nem független.

Több esemény függetlensége

Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események **függetlenek**, ha $P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$ minden $k \leq n$-re és $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$-re.

Több esemény függetlensége

Definíció: Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **függetlenek**, ha $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ minden $k \leq n$-re és $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$-re.

Definíció: Az $A_1, A_2, \dots$ események **függetlenek**, ha minden n-re $A_1, \dots, A_n$ függetlenek.

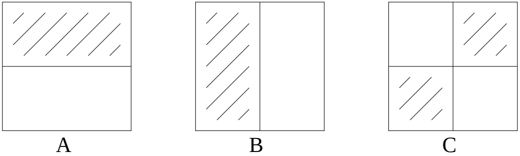
Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel

Egy dobozban M piros és $(N-M)$ fehér golyó van, ezek közül húzunk ki kettőt. Legyen A: az első piros, B: a második piros.

a) Visszatevéssel: $P(A)=\frac{M \cdot N}{N^2}=\frac{M}{N}$, $P(B)=\frac{N \cdot M}{N^2}=\frac{M}{N}$ és $P(AB)=\frac{M \cdot M}{N^2}=P(A) \cdot P(B)$.

b) Visszatevés nélkül: $P(A)=\frac{M(N-1)}{N(N-1)}=P(B)=\frac{M}{N}$, de $P(AB)=\frac{M(M-1)}{N(N-1)} \neq \left(\frac{M}{N}\right)^2=P(A) \cdot P(B)$.

Páronkénti és "többszörös" függetlenség



Itt $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ és $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$, azaz a három esemény páronként független, de $P(ABC) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$, így együttesen nem függetlenek.

Tönkremenési feladat

Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot. A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri. Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van. Mekkora valószínűséggel megy tönkre Péter?

Tönkremenési feladat

Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot. A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri. Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van. Mekkora valószínűséggel megy tönkre Péter?
Legyen $k = 10$ és $n = 26$. Ekkor $n - k = 16$.

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.
B_1 : az első lépésben Péter nyer,
B_2 : az első lépésben Gábor nyer.

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.
B_1 : az első lépésben Péter nyer,
B_2 : az első lépésben Gábor nyer.
Ekkor
$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = p(k+1) \cdot \frac{1}{2} + p(k-1) \cdot \frac{1}{2}$,
ahol $1 \leq k \leq n-1$.
$\Rightarrow 2 \cdot p(k) = p(k+1) + p(k-1)$
$\Rightarrow p(k+1) - p(k) = p(k) - p(k-1) = d$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d.$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d$.

$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}$.

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d.$

$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}.$

$p(k) = 1 - \frac{k}{n}, 1 - p(k) = \frac{k}{n}$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d$.

$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}$.

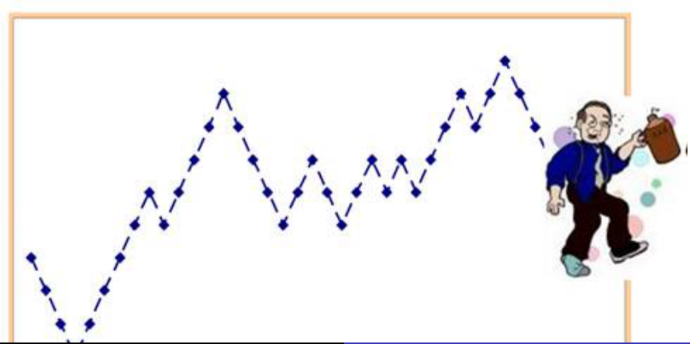
$p(k) = 1 - \frac{k}{n}, 1 - p(k) = \frac{k}{n}$

$k = 10, n = 26 \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{10}{26} = \frac{8}{13}$.

Feladat

Egy számegyenesen lépegetünk az egészeken 0-ból kiindulva, minden lépésben ugyanakkora eséllyel lépünk balra, mint jobbra.

Kérdés: mekkora valószínűséggel térünk vissza a 0-ba? (ezt az eseményt jelöljük C-vel)



Megoldás

Legyen D_1, hogy az első lépésben jobbra, ill. D_2, hogy az első lépésben balra megyünk.
$P(C) = P(C|D_1) \cdot \frac{1}{2} + P(C|D_2) \cdot \frac{1}{2}$
$P(C|D_1)$: annak valószínűsége, hogy 1-ből eljutunk 0-ba
$P(C|D_1) \geq P(\text{1-ből előbb jutunk el 0-ba, mint } n\text{-be}) = 1 - \frac{1}{n}$ minden n-re $\Rightarrow$
$P(C|D_1) \geq 1 - \frac{1}{n}$ minden n-re $\Rightarrow$
$P(C|D_1) = 1$, ugyanígy $P(C|D_2) = 1$, azaz $P(C) = 1$.
Megjegyzés: 2 dimenzióban még ugyanennyi, de 3 dimenzióban már 1-nél kisebb ez a valószínűség.