Valószínűségszámítás

3. előadás

Arató Miklós

2022.02.21.

Tartalomjegyzék

2 esemény függetlensége

Definíció: A és B **függetlenek**, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Megjegyzések

a) Ha $P(A) = 0$, akkor A minden más eseménytől független.

2 esemény függetlensége

Definíció: A és B **függetlenek**, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Megjegyzések

a) Ha $P(A) = 0$, akkor A minden más eseménytől független.

b) Ha $P(B) > 0$, akkor A és B pontosan akkor függetlenek, ha $P(A|B) = P(A)$.

2 esemény függetlensége

Definíció: A és B **függetlenek**, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Megjegyzések

a) Ha $P(A) = 0$, akkor A minden más eseménytől független.

b) Ha $P(B) > 0$, akkor A és B pontosan akkor függetlenek, ha $P(A|B) = P(A)$.

c) Az egymást kizáró események nem függetlenek, azaz $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, $P(AB) = 0$ esetén A és B nem független.

Több esemény függetlensége

Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események **függetlenek**, ha $P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$ minden $k \leq n$-re és $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$-re.

Több esemény függetlensége

Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események **függetlenek**, ha $P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$ minden $k \leq n$-re és $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$-re.

Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots$ események **függetlenek**, ha minden n-re $A_1, \ldots, A_n$ függetlenek.

Tönkremenési feladat

Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot. A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri. Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van. Mekkora valószínűséggel megy tönkre Péter?

Tönkremenési feladat

Péter és Gábor úgy játszanak, hogy mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek egy játszmában a másiktól 1 forintot. A játék addig megy, amíg valaki a másik összes pénzét el nem nyeri. Péternél a játék kezdeténél 10 forint, Gábornál pedig 16 forint van. Mekkora valószínűséggel megy tönkre Péter?
Legyen $k = 10$ és $n = 26$. Ekkor $n - k = 16$.

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.
B_1 : az első lépésben Péter nyer,
B_2 : az első lépésben Gábor nyer.

Tönkremenési feladat megoldása

$A :=$ {Péter k forintról tönkremegy }
$p(k) := P(A)$.
Ekkor $p(0) = 1$ és $p(n) = 0$.
B_1 : az első lépésben Péter nyer,
B_2 : az első lépésben Gábor nyer.
Ekkor
$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = p(k+1) \cdot \frac{1}{2} + p(k-1) \cdot \frac{1}{2}$,
ahol $1 \leq k \leq n-1$.
$\Rightarrow 2 \cdot p(k) = p(k+1) + p(k-1)$
$\Rightarrow p(k+1) - p(k) = p(k) - p(k-1) = d$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d$.

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d$.
$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}$.

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d.$

$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}.$

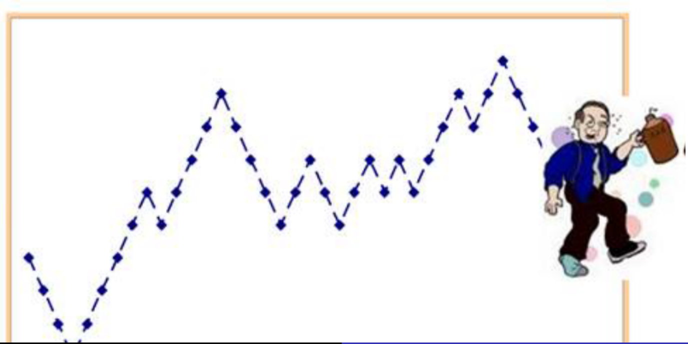
$p(k) = 1 - \frac{k}{n}, 1 - p(k) = \frac{k}{n}$

Tönkremenési feladat megoldása (folyt.)

$p(k) = p(k) - p(k-1) + p(k-1) - p(k-2) + \ldots + p(1) - p(0) + p(0) = 1 + k \cdot d$.
$0 = p(n) = 1 + nd \Rightarrow d = -\frac{1}{n}$.
$p(k) = 1 - \frac{k}{n}, 1 - p(k) = \frac{k}{n}$
$k = 10, n = 26 \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{10}{26} = \frac{8}{13}$.

Feladat

Egy számegyenesen lépegetünk az egészeken 0-ból kiindulva, minden lépésben ugyanakkora eséllyel lépünk balra, mint jobbra.
Kérdés: mekkora valószínűséggel térünk vissza a 0-ba? (ezt az eseményt jelöljük C-vel)



Megoldás

Legyen D_1, hogy az első lépésben jobbra, ill. D_2, hogy az első lépésben balra megyünk.
$P(C) = P(C|D_1) \cdot \frac{1}{2} + P(C|D_2) \cdot \frac{1}{2}$
$P(C|D_1)$: annak valószínűsége, hogy 1-ből eljutunk 0-ba
$P(C|D_1) \geq P(\text{1-ből előbb jutunk el 0-ba, mint } n\text{-be}) = 1 - \frac{1}{n}$ minden n-re $\Rightarrow$
$P(C|D_1) \geq 1 - \frac{1}{n}$ minden n-re $\Rightarrow$
$P(C|D_1) = 1$, ugyanígy $P(C|D_2) = 1$, azaz $P(C) = 1$.
Megjegyzés: 2 dimenzióban még ugyanennyi, de 3 dimenzióban már 1-nél kisebb ez a valószínűség.

Definíció

Definíció: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.

Definíció

Definíció: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.

Definíció: A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan x_i valós számok és A_i teljes eseményrendszer, hogy $\xi = \sum_k x_k \cdot \chi_{A_k}$.

Indikátor és binomiális

Az $A \in \mathcal{A}$ esemény **indikátor valószínűségi változója**

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1 & : \ w \in A \\ 0 & : \ w \notin A \end{cases} .$$

Binomiális eloszlás: Vegyünk n független kísérletet, ahol egy kísérlet p valószínűséggel sikeres, és ξ jelölje a sikeres kísérletek számát ($0 \le k \le n$).

$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Jelölés: $B(n, p)$.

Példa: 6-osok száma 40 kockadobásból.

Geometriai

Geometriai (Pascal-)eloszlás: Független kísérleteket végzünk, amelyek p valószínűséggel sikeresek, η az első sikeres kísérlet sorszáma ($k = 1, 2, \ldots$).

Geometriai

Geometriai (Pascal-)eloszlás: Független kísérleteket végzünk, amelyek p valószínűséggel sikeresek, η az első sikeres kísérlet sorszáma ($k = 1, 2, \ldots$).
$P(\eta = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$
Példa: Kockadobásoknál első 6-os dobás sorszáma.
Állítás: A Pascal-eloszlás **örökifjú tulajdonságú**, azaz
$P(\xi > k + l \mid \xi > k) = P(\xi > l)$.
Bizonyítás: $P(\xi > k + l \mid \xi > k) = \frac{P(\xi>k+l \wedge \xi>k)}{P(\xi>k)} = \frac{P(\xi>k+l)}{P(\xi>k)} = \frac{(1-p)^{k+l}}{(1-p)^{k}} = (1 - p)^{l} = P(\xi > l)$.

Hipergeometrikus

Hipergeometriai eloszlás: Adott egy dobozban M piros és $N - M$ fehér golyó, ezekből húzunk véletlenszerűen n darabot. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát (visszatevés nélkül), és legyen $k = 0, 1, \ldots, \min(M, n)$.

Hipergeometrikus

Hipergeometriai eloszlás: Adott egy dobozban M piros és $N-M$ fehér golyó, ezekből húzunk véletlenszerűen n darabot. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát (visszatevés nélkül), és legyen $k = 0, 1, \ldots, \min(M, n)$.

$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Poisson

Poisson-eloszlás: Legyen $0 < \lambda$ fix paraméter, továbbá $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$P(\eta = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1.$$

Negatív binomiális

Negatív binomiális eloszlás: Független kísérleteket végzünk, amelyek p valószínűséggel sikeresek.
ξ az r-edik sikeres kísérlet sorszáma (ahol r rögzített).
$P(\xi = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot (1-p)^{k-r} \cdot p^r$, ahol $k = r, r+1, \dots$.
Megjegyzés: $r = 1$-re pont a Pascal-eloszlást kapjuk.

Meghatározás

Definíció: A ξ és η diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha minden lehetséges x és y értékükre:

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

Meghatározás

Definíció: A ξ és η diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha minden lehetséges x és y értékükre:

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

Definíció: A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha minden lehetséges $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékükre:

$$P(\xi_1 = x, \dots, \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1) \dots P(\xi_n = x_n)$$

Meghatározás

Definíció: A ξ és η diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha minden lehetséges x és y értékükre:

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

Definíció: A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha minden lehetséges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékükre:

$$P(\xi_1 = x, \ldots, \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1) \ldots P(\xi_n = x_n)$$

Definíció: A $\xi_1, \xi_2, \ldots$ diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha minden n-re $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ függetlenek.

Konvolúció

Állítás: A ξ és η diszkrét valószínűségi változók függetlenek. Ekkor összegük eloszlása:

$$P(\xi+\eta = z) = \sum_x P(\xi = x)P(\eta = z-x) = \sum_y P(\xi = z-y)P(\eta = y)$$

Konvolúció

Állítás: A ξ és η diszkrét valószínűségi változók függetlenek. Ekkor összegük eloszlása:

$$P(\xi+\eta=z)=\sum_x P(\xi=x)P(\eta=z-x)=\sum_y P(\xi=z-y)P(\eta=y)$$

Bizonyítás: Vegyük a $\{\xi=x\}$ teljes eseményrendszert, ahol x befutja ξ lehetséges értékeit. Ekkor:

$$\{\xi+\eta=z\}=\bigcup_x\{\xi+\eta=z\}\{\xi=x\}=\bigcup_x\{\xi=x,\eta=z-x\}$$

Az állítás rögtön következik a következő egyenlőségből:

$$P(\xi=x,\eta=z-x)=P(\xi=x)P(\eta=z-x)$$

Poissonok összege

Állítás: ξ és η független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók λ illetve μ paraméterrel. Ekkor összegük Poisson-eloszlású $\lambda + \mu$ paraméterrel.

Poissonok összege

Állítás: ξ és η független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók λ illetve μ paraméterrel. Ekkor összegük Poisson-eloszlású $\lambda + \mu$ paraméterrel.
Bizonyítás:

$$P(\xi+\eta = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k)P(\eta = n-k) = \sum_{k=0}^{n} P(\xi = k)P(\eta = n-k)$$

Ebből kapjuk, hogy

$$P(\xi + \eta = n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \frac{\mu^{n-k} e^{-\mu}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda + \mu)^n e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}$$