

Valószínűségyszámítás

5. előadás

Arató Miklós

2022.03.07.

Tartalomjegyzék

- 1 Feltételes várható érték
- 2 Valószínűségi vektorváltozók
 - Független valószínűségi változók
- 3 Abszolút folytonos eloszlású változók várható értéke

Meghatározás

Definíció: $P(A) > 0$, ξ diszkrét és véges várható értékű, ekkor ξ **feltételes várható értéke** az A feltételre nézve:

$$E(\xi|A) = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k|A).$$

$$\sum_k |x_k| \cdot P(\xi = x_k|A) = \sum_k |x_k| \cdot \frac{P(\xi=x_k, A)}{P(A)} \leq \frac{1}{P(A)} \sum_k |x_k| \cdot P(\xi = x_k)$$

Teljes várható érték tétel

Tétel: ξ diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel és A_1, A_2, \dots teljes eseményrendszer, ahol $0 < P(A_i)$. Ekkor $E\xi = \sum_n E(\xi|A_n) \cdot P(A_n)$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \sum_n E(\xi|A_n) \cdot P(A_n) &= \sum_n \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k|A_n) \cdot P(A_n) = \\ \sum_k x_k \cdot \sum_n P(\xi = x_k|A_n) \cdot P(A_n) &= \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k) = E\xi. \end{aligned}$$

Wald-azonosság

X_1, X_2, \dots független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyekre létezik EX_i , és N egy tőlük független pozitív, egészértékű valószínűségi változó.

Ekkor $E(X_1 + \dots + X_N) = EX_1 \cdot EN$.

$$P(X_1 + \dots + X_N = y | N = n) = \frac{P(X_1 + \dots + X_n = y, N = n)}{P(N = n)} =$$

$$P(X_1 + \dots + X_n = y) \Rightarrow E(X_1 + \dots + X_N = y | N = n) = n \cdot EX_1$$

\Rightarrow

$$E(X_1 + \dots + X_N) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_1 + \dots + X_N | N = n) \cdot P(N = n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot EX_1 \cdot P(N = n) = EX_1 \cdot EN$$

Geometriai eloszlás

$$P(\eta = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p, \text{ ahol } k \geq 1.$$

$$E\eta = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1 - p)^{k-1} \cdot p.$$

A : az első kísérlet sikeres

$$E\eta = E(\eta|A) \cdot P(A) + E(\eta|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \Rightarrow$$

$$E\eta = 1 \cdot p + (1 + E\eta) \cdot (1 - p) \Rightarrow E\eta = \frac{1}{p}$$

Várhatóan mikor lesz meg mind a 24 törpünk?

$$\frac{24}{24} + \frac{24}{23} + \dots + \frac{24}{2} + \frac{24}{1} = 90,623$$

szimmetrikus bolyongás

ξ : lépések száma n -ből 0-ba ($n \geq 0$), $v(n) := E\xi$.

A : az első lépésben jobbra lépünk \Rightarrow

$$E\xi = E(\xi|A) \cdot \frac{1}{2} + E(\xi|\bar{A}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$E(\xi|A) = 1 + v(n+1) \text{ és } E(\xi|\bar{A}) = 1 + v(n-1) \Rightarrow$$

$$2v(n) = 2 + v(n+1) + v(n-1)$$

$$v(0) = 0$$

$$v(n+1) - v(n) = v(n) - v(n-1) - 2 = \dots = v(1) - v(0) - 2n.$$

\Rightarrow

$$v(n) = v(n) - v(n-1) + v(n-1) - v(n-2) + \dots + v(1) - v(0) + v(0)$$

$$\Rightarrow n \cdot v(1) - n(n-1) = n(v(1) - (n-1)) \geq 0 \Rightarrow v(1) \geq n-1$$

$$\text{minden } n\text{-re } \Rightarrow v(1) = +\infty \Rightarrow$$

szimmetrikus bolyongásnál várhatóan végtelen sok lépésben térünk vissza a kiindulási pontba.

Meghatározás

Definíció: $\underline{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ p -dimenziós **valószínűségi vektorváltozó**, ha minden $1 \leq i \leq p$ -re ξ_i valószínűségi változó.

Meghatározás

Definíció: $\underline{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ p -dimenziós **valószínűségi vektorváltozó**, ha minden $1 \leq i \leq p$ -re ξ_i valószínűségi változó.

Definíció: A $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan \underline{x}_k p -dimenziós vektorok és A_k teljes eseményrendszer, hogy

$$\underline{\xi} = \sum_k \underline{x}_k \cdot \chi_{A_k}.$$

Meghatározás

Definíció: $\underline{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ p -dimenziós **valószínűségi vektorváltozó**, ha minden $1 \leq i \leq p$ -re ξ_i valószínűségi változó.

Definíció: A $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **diszkrét**, ha értékészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan \underline{x}_k p -dimenziós vektorok és A_k teljes eseményrendszer, hogy

$$\underline{\xi} = \sum_k \underline{x}_k \cdot \chi_{A_k}.$$

Definíció: $\underline{\xi}$ **eloszlásfüggvénye:**

$$F_{\underline{\xi}}(\underline{x}) := P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_p < x_p).$$

Meghatározás

Definíció: $\underline{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ p -dimenziós **valószínűségi vektorváltozó**, ha minden $1 \leq i \leq p$ -re ξ_i valószínűségi változó.

Definíció: A $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan \underline{x}_k p -dimenziós vektorok és A_k teljes eseményrendszer, hogy

$$\underline{\xi} = \sum_k \underline{x}_k \cdot \chi_{A_k}.$$

Definíció: $\underline{\xi}$ **eloszlásfüggvénye:**

$$F_{\underline{\xi}}(\underline{x}) := P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_p < x_p).$$

Definíció: $\underline{\xi}$ abszolút folytonos eloszlású, ha $\exists f \geq 0$, hogy

$$F_{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_p} f(s_1, \dots, s_p) ds_p \dots ds_1. \quad f :$$

sűrűségfüggvény.

Példák

Az $\{1, 2, 3, 4\}$ számokból húzunk visszatevés nélkül. Jelöljük X -el az első húzott számot és Y -al a másodikat.

Példák

Az $\{1, 2, 3, 4\}$ számokból húzunk visszatevés nélkül. Jelöljük X -el az első húzott számot és Y -al a másodikat.

Ekkor $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{12}$, ha $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$ és 0 különben.

Példák

Az $\{1, 2, 3, 4\}$ számokból húzunk visszatevés nélkül. Jelöljük X -el az első húzott számot és Y -al a másodikat.

Ekkor $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{12}$, ha $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$ és 0 különben.

Egy kísérletnek k különböző kimenetele lehet. Az i -edik kimenetel valószínűsége p_i . Jelöljük η_i -vel az i -edik kimenetel gyakoriságát n független kísérletből. Ekkor

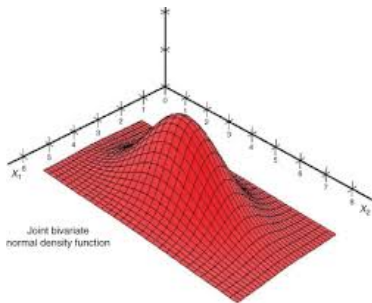
$$P(\eta_1 = l_1, \eta_2 = l_2, \dots, \eta_k = l_k) = \frac{n!}{l_1! l_2! \dots l_k!} p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_k^{l_k}, 0 \leq l_i, l_1 + \dots, l_k = n \text{ (multinomiális eloszlás)}$$

Kétdimenziós normális eloszlás

Sűrűségfüggvény:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right) \right\}$$



Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Tétel (biz. nélkül): F pontosan akkor egy p -dimenziós valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha teljesülnek a következők:

1) F minden változóban monoton növekvő.

2) $\lim_{x_i \searrow -\infty} F_{\underline{x}}(\underline{x}) = 0$ ($i = 1, \dots, p$) és $\lim_{x_i \nearrow +\infty, i=1, \dots, p} F_{\underline{x}}(\underline{x}) = 1$.

3) F minden változóban balról folytonos, és jobbról létezik a limesze.

4) Minden $a_k < b_k$ ($k = 1, \dots, p$) esetén

$$\sum_{\varepsilon_j=0;1} (-1)^{\sum \varepsilon_k} \cdot F(\varepsilon_1 a_1 + (1 - \varepsilon_1) b_1, \dots, \varepsilon_p a_p + (1 - \varepsilon_p) b_p) \geq 0$$

Egy $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozóra az utolsó összeg pont $P(a_k < \xi_k < b_k, k = 1, \dots, p)$.

Meghatározás

Definíció: A ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = \prod_{i=1}^n F_{\xi_i}(x_i) \text{ minden } x_1, \dots, x_n\text{-re.}$$

Definíció: A ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változók **függetlenek**, ha minden n -re ξ_1, \dots, ξ_n függetlenek.

Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n diszkréték. Ekkor pontosan akkor

függetlenek, ha $P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i = x_i)$ minden x_j -re.

Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n abszolút folytonos valószínűségi változók.

Itt a függetlenség ekvivalens azzal, hogy $f_{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(x_i)$.

Megjegyzések

ξ_1, \dots, ξ_n függetlenekre $\{\xi_1 \in B_1\}, \dots, \{\xi_n \in B_n\}$ független események minden "szép" B_1, \dots, B_n halmazra.

Konstans valószínűségi változó minden valószínűségi változótól független.

Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n függetlenek és g_i -k "szép" függvények. Ekkor $g_1(\xi_1), \dots, g_n(\xi_n)$ is függetlenek.

Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n függetlenek és h "szép", k -változós függvény. Ekkor $h(\xi_1, \dots, \xi_k), \xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ is függetlenek.

Diszkrét konvolúciós formula (emlékeztető)

Legyenek ξ és η függetlenek, értékészletük pedig $\{x_k\}$ és $\{y_l\}$.

$$P(\xi + \eta = z) = P\left(\bigcup_{x_k + y_l = z} \{\xi = x_k, \eta = y_l\}\right) =$$

$$\sum_{x_k + y_l = z} P(\xi = x_k, \eta = y_l) = \sum_{x_k + y_l = z} P(\xi = x_k) \cdot P(\eta = y_l).$$

Konvolúciós formula

Legyenek ξ és η független, abszolút folytonos valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ is abszolút folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x-y) \cdot f_{\eta}(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(y) \cdot f_{\eta}(x-y) dy.$$

Exponenciálisak konvolúciója

ξ_1, \dots, ξ_n független λ -exponenciális valószínűségi változók

$$\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \Rightarrow$$

Állítás: η_n sűrűségfüggvénye $g_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{n-1} \cdot \lambda^n \cdot e^{-\lambda x}}{(n-1)!} & x > 0 \end{cases}$.

Bizonyítás: n -re vonatkozó teljes indukció

$n = 1$ rendben . Tegyük fel, hogy n -ig igaz az állítás.

$\Rightarrow (n + 1)$ -re:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= f_{(\xi_1 + \dots + \xi_n + \xi_{n+1})}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(x - y)}_{g_n(x-y)} \cdot \underbrace{f_{\xi_{n+1}}(y)}_{g_1(y)} dy = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(x - y)^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda(x-y)}}{(n-1)!} dy = \\ &= \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda x}}{n!} \int_0^x n(x - y)^{n-1} dy = \frac{x^n \lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda x} (x > 0). \end{aligned}$$

"Buszok száma"

Olyan autóbuszjárat, ahol a buszok követési ideje egymástól független, azonos λ -exponenciális eloszlású.

ξ_1 : az első busz beérkezési ideje, ξ_2 : az első és a második busz érkezése közötti idő, stb. N busz érkezik $[0, t)$ -ben.

$$P(N = n) = P(N \geq n) - P(N \geq n+1) = P(\eta_n < t) - P(\eta_{n+1} < t) =$$

$$\int_0^t \frac{x^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx - \int_0^t \frac{x^n \lambda^{n+1} e^{-\lambda x}}{n!} dx =$$

$$\frac{\lambda^n}{n!} \left\{ \int_0^t n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx - \underbrace{\int_0^t x^n \lambda e^{-\lambda x} dx}_{[x^n e^{-\lambda x}]_0^t - \int_0^t n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx} \right\} = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},$$

Normálisak konvolúciója

Legyenek X és Y független normálisak,
 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, s^2)$. Ekkor összegük sűrűségfüggvénye.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left\{-\frac{y^2}{2s^2}\right\} dy = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2(1+s^2)-2s^2xy}{2s^2}\right\} dy = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+s^2)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+s^2)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{s^2}{1+s^2}}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2 \frac{s^2}{1+s^2}}\right\} dy = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+s^2)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+s^2)}\right\} \Rightarrow X + Y \sim N(0, 1 + s^2) \end{aligned}$$

Normálisak konvolúciója (folyt.)

Legyenek ξ és η független normálisak,
 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Ekkor összegük:

$$\xi + \eta = \sigma_1 \left(\frac{\xi - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\eta - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \mu_1 + \mu_2$$

$$\frac{\xi - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\eta - \mu_2}{\sigma_2} \sim N\left(0, 1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) \Rightarrow$$

$$\sigma_1 \left(\frac{\xi - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\eta - \mu_2}{\sigma_2} \right) \sim N\left(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) \Rightarrow$$

$$\xi + \eta \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Meghatározás és tulajdonságok

Definíció: $\xi \geq 0$ **abszolút folytonos eloszlású**, ekkor

$$E\xi = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{\xi}(x) dx.$$

Definíció: ξ **abszolút folytonos eloszlású**, ekkor

$$E\xi = E\xi^+ - E\xi^-, \text{ ha } \min(E\xi^+, E\xi^-) < \infty.$$

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_{\xi}(x) dx$$

$$\xi \geq 0 \Rightarrow E\xi = \int_0^{\infty} (1 - F_{\xi}(y)) dy$$

ξ, η függetlenek, $E|\xi|, E|\eta|$ végesek. $\Rightarrow E|\xi \cdot \eta|$ is véges és $E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$.

Abszolút folytonos eloszlású példák

$$1) \xi \sim E(a, b) \text{ esetén } E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Abszolút folytonos eloszlású példák

1) $\xi \sim E(a, b)$ esetén $E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$.

2) λ -**exponenciális** eloszlás várható értéke

$$E\xi = \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda}.$$

Abszolút folytonos eloszlású példák

1) $\xi \sim E(a, b)$ esetén $E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$.

2) λ -**exponenciális** eloszlás várható értéke

$$E\xi = \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda}.$$

3) $\xi \sim N(0, 1)$ esetén $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$, hiszen a sűrűségfüggvény szimmetrikus, így az integrálban egy páratlan függvény szerepel (továbbá az integrál konvergens, mert elég nagy x -re $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ felülről becsülhető az e^{-x} függvénnyel).

Általánosan pedig $m + \sigma\xi \sim N(m, \sigma^2)$ esetén

$$E(m + \sigma\xi) = m + \sigma \cdot E\xi = m.$$