Valószínűségszámítás

7. előadás

Arató Miklós

2022.03.28.

Tartalomjegyzék

Kovariancia és korreláció

Definíció: ξ és η valószínűségi változók **kovarianciája**
$cov(\xi,\eta) = E\{(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\}$,
korrelációja $R(\xi,\eta) = corr(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{D\xi \cdot D\eta}$.

Tulajdonságok:

1) $cov(\xi,\eta) = E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta$.

2) $|R(\xi,\eta)| \leq 1$:

$$|cov(\xi,\eta)| = |E\{(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\}| \overset{Cauchy}{\leq} \sqrt{E(\xi - E\xi)^2 \cdot E(\eta - E\eta)^2} = D\xi \cdot D\eta.$$

Cauchy-egyenlőtlenség

Tétel: Tetszőleges véges várható értékű X, Y v.v.-ra
$(E(XY))^2 \leq EX^2 EY^2$

Bizonyítás:

Tetszőleges valós λ-ra igaz, hogy $0 \leq E(X - \lambda Y)^2 \Rightarrow$
$0 \leq \lambda^2 EY^2 - 2\lambda E(XY) + EX^2 \Rightarrow 4\,(E(XY))^2 - 4EX^2 EY^2 \leq 0.$

Kovariancia és korreláció tulajdonságok

3) $|R(\xi,\eta)| = 1 \Leftrightarrow$ létezik $a \neq 0$ és b, hogy $\xi = a\eta + b$.

Biz.: $\Leftarrow$

létezik ilyen a és $b \Rightarrow \xi - E\xi = a(\eta - E\eta)$, $D^2\xi = a^2 D^2\eta \Rightarrow$

$D\xi = |a| D\eta$, $cov(\xi,\eta) = aE(\eta - E\eta)^2 = aD^2\eta \Rightarrow$.

$R = \frac{aD^2\eta}{|a|D\eta D\eta} = \frac{a}{|a|}$

$\Rightarrow$

$R(\xi,\eta) = 1$

$\xi' = \frac{\xi - E\xi}{D\xi}, \eta' = \frac{\eta - E\eta}{D\eta} \Rightarrow$

$E\xi' = E\eta' = 0$ és $D^2\xi' = D^2\eta' = 1 \Rightarrow$

$E(\xi'\eta') = 1, E(\xi' - \eta')^2 = E\xi'^2 - 2E(\xi'\eta') + E\eta'^2 = 0 \Rightarrow$

$\xi' = \eta' \Rightarrow$

ξ az η-nak lineáris transzformáltja

Kovariancia és korreláció tulajdonságok

4) ξ és η függetlenek $\Rightarrow R(\xi,\eta)=0$
$cov(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi\cdot E\eta=E\xi\cdot E\eta-E\xi\cdot E\eta=0.$

5) $\min\limits_{a,b} E(\xi-a\eta-b)^2=E(\xi-m_1-r\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot(\eta-m_2))^2=(1-r^2)\cdot\sigma_1^2,$
ahol $m_1=E\xi$, $m_2=E\eta$, $\sigma_1^2=D^2\xi$, $\sigma_2^2=D^2\eta$ és
$r=R(\xi,\eta)$.
Biz.:
$E(\xi-a\eta-b)^2=E(\xi-m_1-a(\eta-m_2)+m_1-am_2-b)^2=$
$=\sigma_1^2+a^2\sigma_2^2+(m_1-am_2-\underbrace{b}_{=m_1-am_2})^2-2a\cdot\underbrace{cov(\xi,\eta)}_{=r\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2}=$
$=\sigma_1^2+\underbrace{a^2\sigma_2^2-2a\cdot r\sigma_1\sigma_2}_{(a\sigma_2-r\sigma_1)^2-r^2\sigma_1^2}=(1-r^2)\cdot\sigma_1^2+(a\sigma_2-r\sigma_1)^2\Rightarrow$
$a=r\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

Egyenlőtlenségek

Tétel: [Markov-egyenlőtlenség]: Legyen ξ nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik az $E\xi$ várható értéke, továbbá legyen c pozitív szám. Ekkor $P(\xi \geq c) \leq \frac{E\xi}{c}$.
Bizonyítás: Csak diszkrétekre.
$E\xi = \sum_k x_k P(\xi = x_k) \geq \sum_{k:x_k \geq c} x_k P(\xi = x_k) \geq \sum_{k:x_k \geq c} cP(\xi = x_k) = P(\xi \geq c)$

Tétel[Csebisev-egyenlőtlenség]: Ha ξ szórásnégyzete véges, azaz $D^2\xi < \infty$, valamint $0 \leq \lambda$, akkor teljesül a $P(|\xi - E\xi| \geq \lambda) \leq \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$ egyenlőtlenség.
Bizonyítás: A Markov-egyenlőtlenségből könnyen adódik, hiszen az $\eta := (\xi - E\xi)^2$ választással $P(\eta \geq \lambda^2) \leq \frac{E\eta}{\lambda^2} = \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$.

Példa

Egy párt szavazótáborát szeretnénk megbecsülni úgy, hogy legalább $0,95$ valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk. Jelölje N az összes ember, M a kérdéses pártra szavazók, n pedig a megkérdezettek számát, ekkor $p := \frac{M}{N}$-et akarjuk jól közelíteni. Legyen továbbá x_i értéke 1, ha az i-edik megkérdezett az adott pártra szavaz és 0 különben. Ekkor a

$$P\left(\left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - \frac{M}{N}\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, ami pontosan akkor igaz, ha $P\left(\left|\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq 0,05$. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján $P\left(\left|\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)}{0,01^2}$, ahol $\frac{\frac{1}{n^2}D^2(\sum x_i)}{0,01^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot p(1-p)}{0,01^2} = \frac{10000\cdot p(1-p)}{n} \leq \frac{10000\cdot\frac{1}{4}}{n} \leq \frac{5}{100}$, tehát $n \geq 50000$ ember választása biztosan elegendő.

Törvény

Tétel[A nagy számok gyenge törvénye]: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $D^2\xi_i < \infty$ és $E\xi_i = m$. Ekkor minden $0 < \varepsilon$-ra

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Biz.: Tudjuk, hogy $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right) = n \cdot m$. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenséget felhasználva

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot D^2\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}D^2\xi_i}{\varepsilon^2} =$$

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{D^2\xi_1}{\varepsilon^2} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Példa

Tekintsünk független kísérleteket, minden kísérlet legyen p valószínűséggel sikeres.
Jelölje η_n a sikeres kísérletek számát az első n kísérletben.
Ekkor $P(|\frac{\eta_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \to 0$, ha $n \to \infty$.
Legyen ugyanis $\eta_n = X_1 + \ldots + X_n$, ahol $X_i = 1$, ha az i-edik kísérlet sikeres, különben pedig 0.
Továbbá $EX_i = p$ és $D^2 X_i = p(1-p)$. Így X_i-kre teljesülnek az előbbi tétel feltételei, tehát a relatív gyakoriság tart p-hez.

Sztochasztikus konvergencia

Definíció: A ξ_n valószínűségi változó-sorozat **sztochasztikusan tart** ξ-hez, ha minden $0 < \varepsilon$-ra $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$ esetén. Jelölése: $\xi_n \Rightarrow \xi$ (vagy $\xi_n \stackrel{st.}{\to} \xi$).

Állítás: Ha $\xi_n \Rightarrow \xi$, akkor $P(\xi_n < x) \to P(\xi < x)$ $(n \to \infty)$, ez utóbbi minden folytonossági pontjában.

Bizonyítás

Legyen $A_n := \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$. Ekkor
$P(\xi_n < x) = P((\xi_n < x) \cap A_n) + P((\xi_n < x) \cap \overline{A_n}) \le$
$P((\xi_n < x) \cap A_n) + P(\overline{A_n}) =$
$P(((\xi_n - \xi) < (x - \xi)) \cap A_n) + P(\overline{A_n}) \le$
$P(\xi < x + \varepsilon,\ A_n) + P(\overline{A_n}) \le P(\xi < x + \varepsilon) + P(\overline{A_n}) \Rightarrow$
$\limsup P(\xi_n < x) \le P(\xi < x + \varepsilon) + \limsup P(\overline{A_n})$, ahol
$\limsup P(\overline{A_n}) = 0$ minden $0 < \varepsilon$-ra $\Rightarrow$
Ha x folytonossági pontja $P(\xi < x)$-nek, akkor
$\limsup P(\xi_n < x) \le P(\xi < x)$.

Bizonyítás (folyt.)

$P(\xi_n < x) \geq P(\xi_n < x,\ A_n) = P(\xi_n + \xi < x + \xi,\ A_n) =$
$P(\xi < x + \xi - \xi_n,\ A_n) \geq P(\xi < x - \varepsilon,\ A_n) =$
$P(\xi < x - \varepsilon) - P(\xi < x - \varepsilon,\ \overline{A_n}) \geq$
$P(\xi < x - \varepsilon) - P(\overline{A_n}) \Rightarrow$
$\liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x - \varepsilon) - \limsup P(\overline{A_n})$, ahol
$\limsup P(\overline{A_n}) = 0 \Rightarrow \liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x - \varepsilon)$ minden
$0 < \varepsilon$-ra $\Rightarrow \liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x)$.
A folytonossági pontokban $\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x)$ és
$\liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x) \Rightarrow \lim P(\xi_n < x) = P(\xi < x)$.

Következmény

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $D^2\xi_i < \infty$ és $E\xi_i = m$. Ekkor minden $a < m < b$-re

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} < a\right) \to 0 \text{ és}$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} < b\right) \to 1, \text{ ha } n \to \infty.$$

Konvergenciák

Definíció:
$\xi_n \to \xi$ **eloszlásban**, ha $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} F_\xi(x)$ az utóbbi minden folytonossági pontjában.
$\xi_n \to \xi$ **majdnem mindenütt**, ha $P\left(w : \xi_n(w) \to \xi(w)\right) = 1$. [1 valószínűségű konvergencia].
$\xi_n \to \xi$ L^p**-ben**, ha $E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Állítás: Ha $\xi_n \to \xi$ L^p-ben, akkor $\xi_n \Rightarrow \xi$
Bizonyítás:
$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{E|\xi_n-\xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0.$

Példa

ξ_n tart ξ-hez majdnem mindenütt, de L^p-ben nem

$\Omega := [0, 1]$ geometriai valószínűségi mező

$$\xi_n(w) = \begin{cases} e^n & : \quad w \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & : \quad w \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}.$$

Ekkor $\xi_n \to 0$ majdnem mindenütt, viszont

$E|\xi_n|^p = \frac{1}{n}e^{np} + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 0 = \frac{e^{np}}{n} \nrightarrow 0.$

Konvergenciák következményei

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\text{m.m.} \arrow[rr, Rightarrow, shift right, "?"'] \arrow[dr, Rightarrow, "?"'] & & L^p \arrow[ll, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \text{sztochasztikus} \arrow[d, Rightarrow] & \\
& \text{eloszlásban} &
\end{tikzcd}$$

Példák

Legyen $\xi = \pm 1 \frac{1}{2}$ valószínűséggel és $\xi_n = (-1)^n \xi$. Ekkor ξ_n eloszlásban tart ξ-hez, de sztochasztikusan nem.

Állítás: Legyenek Legyenek ξ_i-k azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, melyek eloszlásban konvergálnak egy c konstanshoz. Ekkor $\xi_n \Rightarrow c$.

Bizonyítás: Minden $0 < \varepsilon$-ra

$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 1 - P(\xi_n < c + \varepsilon) + P(\xi_n \leq c - \varepsilon) \leq$
$1 - P(\xi_n < c + \varepsilon) + P(\xi_n < c - \varepsilon/2) \to 1 - 1 + 0, n \to \infty,$

1 valószínűségű konvergencia

Állítás: $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{m\to\infty} P(\sup\limits_{n\geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$ minden pozitív ε-ra.

Bizonyítás: Csak a $\Leftarrow$ irányt látjuk be. Legyen

$$A = \{w : \xi_n(w) \to \xi(w)\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq m} \left\{ w : |\xi_n(w) - \xi(w)| \leq \frac{1}{r} \right\} \Rightarrow$$

$$\overline{A} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq m} \left\{ w : |\xi_n(w) - \xi(w)| > \frac{1}{r} \right\}.$$

Így $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt pontosan akkor, ha $P(\overline{A}) = 0$.

Bizonyítás folytatása

$$\bigcup_{n\geq m}\{w : |\xi_n(w)-\xi(w)| > \tfrac{1}{r}\} = \{w : \sup_{n\geq m}|\xi_n(w)-\xi(w)| > \tfrac{1}{r}\} = B_{r,m} \Rightarrow.$$

$$B_{r,m} \supseteq B_{r,m+1} \supseteq B_{r,m+2} \supseteq \dots$$

$$B_r = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{r,m} \Rightarrow P(B_r) \leq \lim_{m\to\infty} P(B_{r,m}) = 0.$$

$B_r \subseteq B_{r+1} \subseteq B_{r+2} \subseteq \dots$ és $\overline{A} = \bigcup_r B_r \Rightarrow P(\overline{A}) \leq \sum P(B_r) = 0 \Rightarrow$ állítás

Következmények

Ha $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt, akkor ξ_n sztochasztikusan is konvergál ξ-hez, ugyanis $P(|\xi_m - \xi| > \varepsilon) \leq P(\sup_{n\geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$ minden pozitív ε-ra, akkor $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt, ugyanis $P\left(\sup_{n\geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) =$ $P\left(\bigcup_{n\geq m} \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Borel-Cantelli lemmák

Legyen az A_n eseménysorozatra $\liminf \overline{A_l} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{l=n}^{\infty} \overline{A_l}$, illetve $\limsup A_k := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Ekkor $w \in \liminf \overline{A_l}$ pontosan akkor teljesül, ha w az A_n-ek közül csak véges soknak eleme, illetve $w \in \limsup A_k$ pontosan akkor teljesül, ha w végtelen sok A_n-nek eleme.

Borel-Cantelli-lemmák

1) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, akkor az A_n-ek közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be.

2) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ és az A_n-ek függetlenek, akkor az A_n-ek közül 1 valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik.

Borel-Cantelli lemmák bizonyítása

1) $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\le P\left(\bigcup_{k\ge n}A_k\right)\le\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)\xrightarrow{n\to\infty}0$, azaz 0 valószínűséggel következik be végtelen sok, így 1-gyel véges sok.

2) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A_k}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\bigcap_{k\ge n}\overline{A_k}\right)$, ahol

$P\left(\bigcap_{k\ge n}\overline{A_k}\right)\le P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\overline{A_k}\right)=\prod_{k=n}^{m}P(\overline{A_k})\le e^{-\sum_{k=n}^{m}P(A_k)}$, ami $n\to\infty$ esetén 0-hoz tart. (Az utolsó becslésnél felhasználtuk, hogy $1-x\le e^{-x}$.)

Példa

ξ_n tart ξ-hez L^p-ben, de nem tart majdnem mindenütt:
Legyenek ξ_n-ek függetlenek, $P(\xi_n = 1) = d_n$, $P(\xi_n = 0) = 1 - d_n$ és $E|\xi_n|^p = d_n$.
ξ_n sorozat pontosan akkor tart L^p-ben 0-hoz, ha $d_n \to 0$.
ξ_n pontosan akkor tart 0-hoz majdnem mindenütt, ha 1 valószínűséggel véges sok ξ_n nem 0, ami pedig a Borel-Cantelli-lemma szerint ekvivalens azzal, hogy $\sum d_n$ véges.
Például a $d_n = \frac{1}{n}$ választás esetén $\xi_n \nrightarrow 0$ majdnem mindenütt, viszont L^p-ben igen.