Valószínűségszámítás

8. előadás

Arató Miklós

2022.04.04.

Tartalomjegyzék

Emlékeztető

Tétel[A nagy számok gyenge törvénye]: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $D^2\xi_i < \infty$ és $E\xi_i = m$. Ekkor minden $0 < \varepsilon$-ra

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Sztochasztikus konvergencia

Definíció: A ξ_n valószínűségi változó-sorozat **sztochasztikusan tart** ξ-hez, ha minden $0 < \varepsilon$-ra $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$ esetén. Jelölése: $\xi_n \Rightarrow \xi$ (vagy $\xi_n \xrightarrow{st.} \xi$).

Állítás: Ha $\xi_n \Rightarrow \xi$, akkor $P(\xi_n < x) \to P(\xi < x)$ $(n \to \infty)$, ez utóbbi minden folytonossági pontjában.

Következmény

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $D^2\xi_i < \infty$ és $E\xi_i = m$. Ekkor minden $a < m < b$-re

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} < a\right) \to 0 \text{ és}$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} < b\right) \to 1, \text{ ha } n \to \infty.$$

Konvergenciák

Definíció:

$\xi_n \to \xi$ **eloszlásban**, ha $F_{\xi_n}(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} F_\xi(x)$ az utóbbi minden folytonossági pontjában.

$\xi_n \to \xi$ **majdnem mindenütt**, ha $P\left(w : \xi_n(w) \to \xi(w)\right) = 1$. [1 valószínűségű konvergencia].

$\xi_n \to \xi$ L^p**-ben**, ha $E|\xi_n - \xi|^p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Állítás: Ha $\xi_n \to \xi$ L^p-ben, akkor $\xi_n \Rightarrow \xi$

Bizonyítás:

$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0.$

Példa

ξ_n tart ξ-hez majdnem mindenütt, de L^p-ben nem

$\Omega := [0,1]$ geometriai valószínűségi mező

$$\xi_n(w) = \begin{cases} e^n & : \ w \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & : \ w \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases} .$$

Ekkor $\xi_n \to 0$ majdnem mindenütt, viszont

$E|\xi_n|^p = \frac{1}{n}e^{np} + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 0 = \frac{e^{np}}{n} \nrightarrow 0.$

Konvergenciák következményei

m.m. $\not\Leftarrow$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ L^p

m.m. $\overset{?}{\Rightarrow}$ sztochasztikus

$L^p \Rightarrow$ sztochasztikus

sztochasztikus $\Downarrow$ eloszlásban

Példák

Legyen $\xi = \pm 1 \frac{1}{2}$ valószínűséggel és $\xi_n = (-1)^n \xi$. Ekkor ξ_n eloszlásban tart ξ-hez, de sztochasztikusan nem.

Állítás: Legyenek Legyenek ξ_i-k azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, melyek eloszlásban konvergálnak egy c konstanshoz. Ekkor $\xi_n \Rightarrow c$.

Bizonyítás: Minden $0 < \varepsilon$-ra

$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 1 - P(\xi_n < c + \varepsilon) + P(\xi_n \leq c - \varepsilon) \leq$
$1 - P(\xi_n < c + \varepsilon) + P(\xi_n < c - \varepsilon/2) \to 1 - 1 + 0, n \to \infty,$

1 valószínűségű konvergencia

Állítás: $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{m\to\infty} P(\sup\limits_{n\geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$ minden pozitív ε-ra.
Bizonyítás: Csak a $\Leftarrow$ irányt látjuk be. Legyen

$$A = \{w : \xi_n(w) \to \xi(w)\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq m} \left\{ w : |\xi_n(w) - \xi(w)| \leq \frac{1}{r} \right\} \Rightarrow$$

$$\overline{A} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq m} \left\{ w : |\xi_n(w) - \xi(w)| > \frac{1}{r} \right\}.$$

Így $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt pontosan akkor, ha $P(\overline{A}) = 0$.

Bizonyítás folytatása

$$\bigcup_{n\geq m}\{w : |\xi_n(w)-\xi(w)| > \tfrac{1}{r}\} = \{w : \sup_{n\geq m}|\xi_n(w)-\xi(w)| > \tfrac{1}{r}\} = B_{r,m} \Rightarrow .$$

$$B_{r,m} \supseteq B_{r,m+1} \supseteq B_{r,m+2} \supseteq \dots$$

$$B_r = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{r,m} \Rightarrow P(B_r) \leq \lim_{m\to\infty} P(B_{r,m}) = 0.$$

$B_r \subseteq B_{r+1} \subseteq B_{r+2} \subseteq \dots$ és $\overline{A} = \bigcup_r B_r \Rightarrow P(\overline{A}) \leq \sum P(B_r) = 0 \Rightarrow$ állítás

Következmények

Ha $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt, akkor ξ_n sztochasztikusan is konvergál ξ-hez, ugyanis
$P(|\xi_m - \xi| > \varepsilon) \leq P(\sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$ minden pozitív ε-ra, akkor $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt, ugyanis $P\left(\sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) =$
$P\left(\bigcup_{n \geq m} \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$

Borel-Cantelli lemmák

Legyen az A_n eseménysorozatra $\liminf \overline{A_l} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{l=n}^{\infty} \overline{A_l}$, illetve $\limsup A_k := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Ekkor $w \in \liminf \overline{A_l}$ pontosan akkor teljesül, ha w az A_n-ek közül csak véges soknak eleme, illetve $w \in \limsup A_k$ pontosan akkor teljesül, ha w végtelen sok A_n-nek eleme.

Borel-Cantelli-lemmák

1) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, akkor az A_n-ek közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be.

2) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ és az A_n-ek függetlenek, akkor az A_n-ek közül 1 valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik.

Borel-Cantelli lemmák bizonyítása

1) $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty}P(A_k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, azaz 0 valószínűséggel következik be végtelen sok, így 1-gyel véges sok.

2) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A_k}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}P\left(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\right)$, ahol

$P\left(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\right) \leq P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^{m}P(\overline{A_k}) \leq e^{-\sum_{k=n}^{m}P(A_k)}$, ami $n\to\infty$ esetén 0-hoz tart. (Az utolsó becslésnél felhasználtuk, hogy $1-x \leq e^{-x}$.)

Példa

ξ_n tart ξ-hez L^p-ben, de nem tart majdnem mindenütt:
Legyenek ξ_n-ek függetlenek, $P(\xi_n = 1) = d_n$,
$P(\xi_n = 0) = 1 - d_n$ és $E|\xi_n|^p = d_n$.
ξ_n sorozat pontosan akkor tart L^p-ben 0-hoz, ha $d_n \to 0$.
ξ_n pontosan akkor tart 0-hoz majdnem mindenütt, ha 1 valószínűséggel véges sok ξ_n nem 0, ami pedig a Borel-Cantelli-lemma szerint ekvivalens azzal, hogy $\sum d_n$ véges.
Például a $d_n = \frac{1}{n}$ választás esetén $\xi_n \nrightarrow 0$ majdnem mindenütt, viszont L^p-ben igen.

Tétel

Nagy számok Cantelli-féle erős törvénye: $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $E|\xi_n - E\xi_n|^4$ véges. Ekkor $\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \to E\xi_1$ 1 valószínűséggel.

Bizonyítás

Megjegyzés: Elég, ha $E|\xi_i| < \infty$, ez a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye

Bizonyítás: $m = E\xi_1, \tilde{\xi}_k = \xi_k - m$

Elég $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k}{n} \to 0$. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k$, $P\left(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(\frac{S_n}{n}\right)^4}{\varepsilon^4}$

$$S_n^4 = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k^4 + 6 \cdot \sum_{i<j}^{n} \tilde{\xi}_i^2 \tilde{\xi}_j^2 +$$

$$12 \cdot \sum_{i \neq j, i \neq k, i<k} \tilde{\xi}_i^2 \tilde{\xi}_j \tilde{\xi}_k + 24 \cdot \sum_{i<j<k<l} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_l + 4 \cdot \sum_{i \neq j} \tilde{\xi}_i^3 \tilde{\xi}_j \Rightarrow$$

$$ES_n^4 = nE\tilde{\xi}_1^4 + 6 \cdot \sum_{i<j} E\tilde{\xi}_i^2 E\tilde{\xi}_j^2 = nE\tilde{\xi}_1^4 + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \left(E\tilde{\xi}_1^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{ES_n^4}{n^4} < c \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon\right) < \infty$$

Példa 1.

0,25-paraméterű indikátor és N(0,25,1) változók átlaga

Definíció: Az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású, ha eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{\alpha} & x > 0. \end{cases}$$

(1,5)-Pareto változók átlaga

Példa 2.

"A számok rendesek" (Borel): $\Omega = [0,1]$, $w = 0, w_1 w_2 \ldots$ 2-es diadikus tört és $\xi_n(w) = w_n$ (n-edik számjegy)

$$\left\{w : \xi_1(w) = x_1, \ldots, \xi_n(w) = x_n\right\} =$$
$$\left\{w : \tfrac{x_1}{2} + \tfrac{x_2}{2^2} + \ldots + \tfrac{x_n}{2^n} \le w < \tfrac{x_1}{2} + \tfrac{x_2}{2^2} + \ldots + \tfrac{x_n}{2^n} + \tfrac{1}{2^n}\right\} \Rightarrow$$

$P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \frac{1}{2^n} \Rightarrow P(\xi_i = x_i) = \frac{1}{2}$

$x_i = 0, 1$ és ξ-k függetlenek. $\Rightarrow$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \to E\xi_1 = \frac{1}{2} \text{ 1 valószínűséggel}$$

Példa 3.

Monte-Carlo módszer: $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos.
Kérdés: $\int_0^1 f(x)\, dx$ becsülhető-e véletlen számgenerálás segítségével?
$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots$ független $E(0,1)$-eloszlásúak

$$\varrho_i = \begin{cases} 1, & ha\ f(\xi_i) > \eta_i \\ 0, & különben \end{cases} .$$

Belátható, hogy $E\varrho_i = P\left(f(\xi_i) > \eta_i\right) = \int_0^1 f(x)dx$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \varrho_i}{n} \to \int_0^1 f(x)\, dx$$ 1 valószínűséggel

Példa 4.

A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n-el. Mihez tart X_n?

Példa 4.

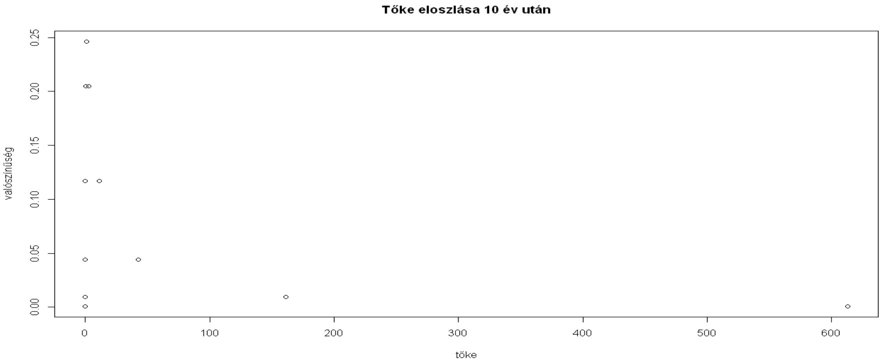
A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér, *n* év múlva az értékét jelöljük X_n-el. Mihez tart X_n?

A részvény várható éves hozama 20%.

Y_n:hányszorosára változik a részvény árfolyama az *n*-edik évben $\Rightarrow X_n = Y_1 \dots Y_n$ és $EX_n = EY_1 \dots EY_n = 1{,}2^n \Rightarrow EX_n \to +\infty$

Egy tipikus HUNCUT részvényárváltozás

Példa folytatása



ábra: A HUNCUT részvény eloszlása

Példa folytatása

$X_n = \exp\{lnY_1 + \cdots + lnY_n\}$.
Nagy számok erős törvénye $\Rightarrow$

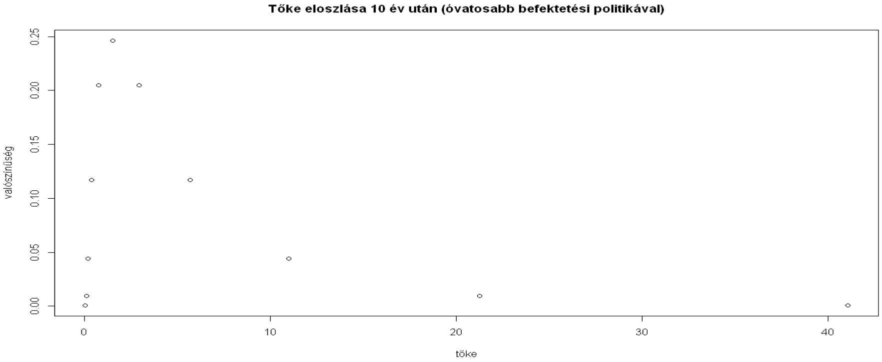
$\frac{lnY_1+\cdots+lnY_n}{n} \to E(lnY_1) = \frac{1}{2}ln(0,95) < 0$ (1 valószínűséggel).

$\Rightarrow X_n = \left(\exp\left\{\frac{lnY_1+\cdots+lnY_n}{n}\right\}\right)^n \to 0$ (1 valószínűséggel).

Előző példa folytatása

Minden év végén tőként felét a HUNCUT részvénybe fektetjük, a másik felét azonban párnánk alatt készpénzben tartjuk.
Z_n: tőkénk n év múlvabeli értéke. Tőkénk várható éves hozama $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 190\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 50\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%\right) - 100\% = 10\%$.
U_n: hányszorosára változik a részvény árfolyama az n-edik évben.
$Z_n = U_1 \dots U_n$ és $EZ_n = EU_1 \dots EU_n = 1,1^n \to +\infty$
Tőkeváltozás új stratégiával

Példa folytatása



ábra: Tőkénk eloszlása, ha mindig csak a felét fektetjük be a HUNCUT részvénybe

Példa folytatása

$Z_n = \exp\{lnU_1 + \cdots + lnU_n\}$.

$\frac{lnU_1+\cdots+lnU_n}{n} \to E(lnU_1) = \frac{1}{2} ln(1,45 \cdot 0,75) > 0$ (1 valószínűséggel). $\Rightarrow$

$Z_n = \exp\left(\frac{lnU_1+\cdots+lnU_n}{n}\right)^n \to +\infty$ (1 valószínűséggel)