Valószínűségszámítás gyakorlat

(11. hét) Konvergenciák és nagy számok törvényei

1. Feladat. Legalább mekkora valószínűséggel állíthatjuk, hogy egy szabályos érmével végzett 100-as dobássorozatban a fejdobások száma legalább 44 és legfeljebb 56? Mit mondhatunk 1000-es dobássorozat esetén arról, hogy a fejdobások száma legalább 440 és legfeljebb 560? Használjunk normális közelítést és Esséen-típusú becsléseket!

2. Feladat. Legyenek X_i-k független $0,004-$paraméterű indikátor változók. Becsüljük meg a $P(X_1 + \cdots + X_{3000} \geq 16)$ valószínűséget különböző módszerekkel! (Csebisev, Markov, normális és Poisson-közelítés)

3. Feladat. Egy biztosítónál 10 ezer ember köt baleseti halálra szóló biztosítást. 8 ezer embernél 1 M Ft-ot fizet a biztosító halál esetén és 2 ezer embernél 5 M Ft-ot. Az éves baleseti halál valószínűség 0,6 ezrelék. Mennyi a valószínűsége, hogy a biztosító legalább 9 M Ft-ot fog kifizetni?

4. Feladat. Legyenek X_i-k független változók 1 várható értékkel és 2 szórással. Becsüljük meg a $P(X_1 + \cdots + X_{1000} \geq 1050)$ valószínűséget! Mennyi lenne ez a valószínűség, ha tudjuk, hogy ezek a változók Gamma eloszlásúak?

Valószínűségszámítás gyakorlat

(9-10. hét) Konvergenciák és nagy számok törvényei

5. Feladat. Legalább mekkora valószínűséggel állíthatjuk, hogy egy szabályos érmével végzett 100-as dobássorozatban a fejdobások száma legalább 44 és legfeljebb 56? Mit mondhatunk 1000-es dobássorozat esetén arról, hogy a fejdobások száma legalább 440 és legfeljebb 560?

6. Feladat. Adjunk példát olyan $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változókból álló sorozatra, melyre $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, egy megfelelő ξ valószínűségi változóra, de $\xi_n \to \xi$ nem teljesül sztochasztikus értelemben.

7. Feladat. A $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn vannak értelmezve és $\xi_n \to c$ eloszlásban, ahol c konstans. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to c$ sztochasztikusan.

8. Feladat. Legyenek az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók függetlenek. Milyen értelemben konvergensek az alábbi sorozatok, és mi a limeszük?

(a) X_i független p paraméterű indikátorváltozó; $Y_n = (X_1^5 + \dots + X_n^5)/n$.

(b) X_i az i. szabályos kockadobás eredménye; $Y_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$; illetve $Z_n = (X_1^2 + \dots + X_n^2)/n$.

(c) X_i exponenciális eloszlású 2 paraméterrel (azaz sűrűségfüggvénye $f(x) = 2e^{-2x}\mathbb{I}(x > 0)$; $Y_n = (e^{X_1} + \dots + e^{X_n})/n$, illetve $Z_n = \frac{X_1^2+X_2^2+\dots+X_n^2}{n}$.

9. Feladat. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen x^{-5}, ha $x > c$, és 0 különben.

(a) Határozzuk meg c értékét.

(b) Feltéve, hogy $X > 2c$, mennyi a valószínűsége, hogy $X > 3c$?

(c) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ az X-szel azonos eloszlású, egymástól független valószínűségi változók. Határozzuk meg az

$$\frac{X_1^3 + X_2^3 + \dots + X_n^3}{n}$$

limeszét sztochasztikus, illetve 1 valószínűségű értelemben, ha ezek a limeszek léteznek $n \to \infty$ esetén.

10. Feladat. Tegyük fel, hogy egy biztosító ügyfelei minden napon a többitől függetlenül 50 várható értékű Poisson-eloszlással leírható számú balesetet szenvednek. Legyen X_j a j. napon okozott károk száma.

Határozzuk meg az

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n}$$

határértékeket, azzal együtt, hogy milyen értelemben léteznek ezek a határértékek.

11. Feladat. Mihez és hogyan konvergál független szabályos kockadobások mértani közepe?

12. Feladat. ξ-k független 3-paraméterű Poisson eloszlású változók. Mihez és hogyan konvergál

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$$

13. Feladat. ξ-k független $N(5, 6^2)$ eloszlású változók. Mihez és hogyan konvergál

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$$

(6-8. hét) Momentumok, kovariancia, korrelációs együttható, egyenlőtlenségek

14. Feladat. Mennyi egy gamma eloszlású valószínűségi változó várható értéke?

15. Feladat. ξ standard normális eloszlású. Mennyi e^{ξ} várható értéke?

16. Feladat. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 1$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás– és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

17. Feladat. Legyen X sűrűségfüggvénye $\frac{c}{x^4}$ ha $x > 1$, és 0 különben.

a) Mennyi c értéke?

b) Számítsuk ki X momentumait minden olyan $k \geq 1$-re, melyre ez véges.

c) Mennyi X szórása?

18. Feladat. Legyen X egyenletes eloszlású az $[1, 4]$ intervallumon. Számítsuk ki $(X-1)^2$ várható értékét!

19. Feladat. Egy osztályba 16 fiú és 20 lány jár. Tegyük fel, hogy minden tanítási napon egymástól függetlenül a fiúk $0,04$, a lányok $0,05$ valószínűséggel hiányoznak. Legyen X a jövő hétfőn hiányzó fiúk, Y pedig a jövő hétfőn hiányzó lányok száma.
(a) Számítsuk ki az összes jövő hétfői hiányzó, vagyis $X + Y$ várható értékét.
(b) Számítsuk ki X, Y és $X + Y$ szórását.
(c) Mennyi X és Y kovarianciája?
(d) Mennyi X és $X + Y$ kovarianciája?
(e) Mennyi X és $X + Y$ korrelációs együtthatója?

20. Feladat. Legyenek X és Y független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, X várható értéke 4, Y várható értéke pedig 10.
(a) Mennyi $X + Y$ várható értéke?
(b) Mennyi $X + Y$ szórása? $\sqrt{14} = 3,74$.
(c) Mennyi X és $X + Y$ korrelációs együtthatója?
(d) Mennyi $2X + 3Y$ és $X - Y$ kovarianciája?
(e) Mennyi $2X - Y$ szórása?

21. Feladat. Egy cukrászdában a naponta fagylaltozók számáról azt tudjuk, hogy a kis adagot kérők száma (ez legyen X), Poisson-eloszlású 50 paraméterrel, a nagy adagot kérők száma Poisson-eloszlású 150 paraméterrel (ez legyen Y), és hogy X és Y függetlenek. A kis adag ára 300 forint, a nagyé 500.

1. Mennyi a napi bevétel várható értéke, illetve szórása?
2. Számítsuk ki X-nek és napi bevételnek a korrelációs együtthatóját.

22. Feladat. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, Y a különbségük. Számítsuk ki $\mathrm{cov}(X, Y)$-t és $R(X, Y)$-t! Független-e X és Y? Számítsuk ki $R(X + Y, 2X - Y)$-t is.

23. Feladat. Tegyük fel, hogy egy ember (szisztolés) vérnyomása minden mérésnél 120 Hgmm várható értékű, 10 szórású valószínűségi változó. Legyen X és Y két vérnyomásmérés eredménye, és tegyük fel, hogy elég sok idő eltelt a két mérés között ahhoz, hogy feltehessük, hogy a mérési eredmények egymástól függetlenek.
(a) Mennyi a két mérés átlagának várható értéke és szórása?
(b) Mennyi lenne a mérések átlagának várható értéke és szórása $n = 10$, illetve $n = 100$ mérés esetén?
(c) Ha n mérés van, mennyi az első k mérés átlagának és az összes mérés átlagának a korrelációs együtthatója?

24. Feladat. Egy csoportban 25-en tanulnak. Tegyük fel, hogy a tanulók születésnapjai függetlenek és az év tizenkét hónapjában egyenletes eloszlásúak. Számítsuk ki azon hónapok számának a várható értékét és szórását, amelyekre egy születésnap sem esik.

25. Feladat. Egy elektromos vezetékgyártó cég 40 m-es vezetékeket gyárt $0,2$ m szórással. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vezeték hossza legalább 1 m-rel eltér a várható 40 m-es értéktől? Mennyi a pontos érték, ha feltesszük még azt is, hogy a hossz normális eloszlású?

Valószínűségszámítás gyakorlat

(5. hét) Valószínűségi változók

26. Feladat. Legyenek az X diszkrét valószínűségi változó értékei $-2, 1, 3$, a következő valószínűségekkel:

$$P(-2) = 1/2, \quad P(1) = 1/3, \quad P(3) = 1/6.$$

Rajzolja fel az $F(x)$ eloszlásfüggvényt!

27. Feladat. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ c \cdot x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Mennyi c értéke? Mennyi annak valószínűsége, hogy X értéke $1/4$ és $1/2$ közé esik? Mennyi a valószínűsége, hogy $1/2$ és $3/4$ közé esik? Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

28. Feladat. Tegyük fel, hogy a holnapi középhőmérséklet 6 várható értékű 2 szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet legfeljebb 10 fok? Mennyi a valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet 8 és 10 fok közé esik? Mennyi a valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet 0 és 12 fok közé esik?

29. Feladat. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?

30. Feladat. Tegyük fel, hogy egy ember reakcióideje másodpercben mérve exponenciális eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) Határozzuk meg a reakcióidő eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

(b) a reakcióideje legalább $0,5$ másodperc;

(c) a reakcióideje legalább 1 másodperc;

(d) a reakcióideje 1 és 2 másodperc közé esik.

(e) feltéve, hogy a reakcióideje legalább 1 másodperc, a reakcióidő legalább 2 másodperc;

(f) Milyen t-re igaz, hogy a reakcióidő pontosan $1/2$ valószínűséggel lesz t-nél kisebb?

31. Feladat. A lovaskocsik felelősségbiztosítások kárainál dologi és személyi kártérítést nyújt a biztosító. A dologi kifizetések $\Gamma(\alpha, \lambda)$ eloszlásúak, a személyiek pedig $\Gamma(\beta, \lambda)$ eloszlásúak. Feltételezzük, hogy a két kifizetés független egymástól. Milyen eloszlású egy kár összkifizetése?

32. Feladat. Bublundia köztársaságban q-féle részvény van a tőzsdén. Ezek árfolyamai függetlenek egymástól. Egy év múlva az i-edik részvény eredeti árának X_i^2-szeresét éri, ahol $X_i \sim N(0,1)$, és egymástól függetlenek. Milyen eloszlású egy befektető portfoliójának értéke egy év múlva, ha most mindegyik részvénybe 1 petákot fektetett?

33. Feladat. Milyen eloszlású két független $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó összege?

(4. hét) Függetlenség, együttes eloszlás, konvolúció, várható érték

34. Feladat. Célbalövéskor háromszor próbálkozhatunk. Az első lövésnél 60 %, a másodiknál 70 %, a harmadiknál 80 % eséllyel találjuk el a célt, az egyes lövéseknél egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) egyszer sem találjuk el a célt?

(b) csak a harmadik lövésnél találunk célba?

(c) egyszer sem találjuk el a célt, feltéve, hogy az első lövést elhibáztuk?

(d) feltéve, hogy összesen kétszer találtunk célba, az első lövés sikeres volt?

(e) Adjuk meg az első sikeres találat sorszámának és az összes találat számának az együttes eloszlását (ha nincs találat, az első sikeres találat sorszáma helyett írjunk 0-t).

35. Feladat. Húzzunk egy franciakártya-csomagból két lapot visszatevés nélkül. Jelölje X a kihúzott kárók, Y az ászok számát. (Ötvenkét lap van a csomagban, ebből 13 káró és 4 ász, káró ászból pedig egy van.)

(a) Adjuk meg X és Y együttes eloszlását.

(b) Igaz-e, hogy X és Y függetlenek?

(c) Mennyi $X + Y$ várható értéke? Mennyi $3X + 5Y$ várható értéke?

36. Feladat. Egy cukrászdában kétféle fagylaltot árulnak. Tegyük fel, hogy az egy nap alatt eladott kis adag fagylaltok száma Poisson-eloszlású, várható értéke 50, a nagy adagok száma ettől független, Poisson-eloszlású, várható értéke 100.

(a) Adjuk meg az $(X, X + Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását és a peremeloszlásait is.

(b) Feltéve, hogy $X + Y = 5$, milyen eloszlású X?

(c) Igaz-e, hogy $X + Y$ és $X - Y$ függetlenek?

(d) Mennyi a napi bevétel várható értéke, ha a kis adag 300, a nagy adag 400 forintba kerül?

37. Feladat. Egy szoftver frissítéséhez 68 fájlt kell telepíteni, amik egymástól függetlenül 10mp várható értékű és 2mp szórású, normális eloszlású ideig töltődnek.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy a teljes frissítés lezajlik 12 percen belül?
b) A cég a következő frissítésnél azt ígéri, hogy az már 95% valószínűséggel 10 percen belül betöltődik. Hány fájlból állhat ez a frissítés?
$(\Phi(2,42) = 0,992, \Phi(1,645) = 0,95)$

38. Feladat. Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

39. Feladat. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Egymástól függetlenül mindenki választ a 10 emelet közül egyet (mindegyiket azonos valószínűséggel), ahol kiszáll. Várhatóan hány emeleten áll meg a lift?

40. Feladat. Mennyi az ötöslottón kihúzott

a) számok összegének várható értéke?

b) páros számok számának várható értéke?

c) a kihúzott páros számok összegének várható értéke?

41. Feladat. Tegyük fel, hogy egy dobozban van $2N$ kártyalap, melyek közül kettõn 1-es, kettõn 2-es szám van és így tovább. Válasszunk ki véletlenszerûen m lapot. Várhatóan hány pár marad a dobozban?

42. Feladat. Egy bányász a bánya egyik termében rekedt, ahonnan három út nyílik. Az első egy három perces út végén a szabadba vezet. A második út öt, a harmadik hét percnyi séta után visszatér ugyanebbe a terembe. A bányász minden alkalommal a többi választástól függetlenül egyenlő valószínűséggel választ egyet az utak közül. Legyen X a szabadba jutáshoz szükséges idő. Mennyi X várható értéke?

43. Feladat. Szerencsejátékot játszunk, amely során minden fordulóban a feltett tétet $\frac{1}{2}$ valószínűséggel megduplázzuk, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig elveszítjük. Kezdetben 1 petákunk van. Addig folytatjuk, amíg 5 petákunk nem lesz vagy el nem fogy az összes pénzünk. Várhatóan hány játszmát fogunk játszani, ha a mohó stratégiát követjük, azaz mindig akkora tétet választunk, amennyi az öthöz hiányzik, vagy ha ez nem lehetséges, akkor az összes pénzünket feltesszük? Várhatóan hány játszmát fogunk játszani, ha az óvatos stratégiát követjük, és minden lépésben egy petákot teszünk fel?

(3. hét) Valószínűségi változók, nevezetes eloszlások

44. Feladat. Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámok legkisebbikét (itt $1 - 90$-ig számozott golyók közül húznak ötöt). Adjuk meg X eloszlását!

45. Feladat. Tegyük fel, hogy az új internetelőfizetők mindegyike a többiektől függetlenül 20%-a speciális kedvezményt kap. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 ismerősünk közül, akik most fizettek elő, legalább négyen részesülnek a kedvezményben?

46. Feladat. Négy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után addig, amíg elő nem fordul, hogy a négy dobásból legalább három hatos. Jelölje Y, hogy hányszor kell dobni ehhez. Adjuk meg Y eloszlását.

47. Feladat. Egy bükkösben a bükkmagoncok négyzetméterenkénti száma Poisson-eloszlású, $\lambda = 2,5$ db / m^2 paraméterrel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 1 m^2-es mintában

a) legfeljebb egy, ill.

b) több, mint három magoncot találunk?

48. Feladat. Egy forgalmas útszakaszon azt figyelik, hogy öt perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. A tapasztalatok alapján feltételezzük, hogy annak valószínűsége, hogy van ilyen autó, ugyanannyi, mint annak, hogy nincs. A gyorshajtók számát Poisson-eloszlásúnak feltételezve mennyi a valószínűsége, hogy pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt öt perc alatt?

49. Feladat. Tegyük fel, hogy az, hogy Péter hány emailt, illetve hány facebook-üzenetet kap egy napon, egymástól független valószínűségi változók. Az emailek száma X, ennek paramétere 5, a facebook-üzenetek száma Y, ennek paramétere 8, és mindkét valószínűségi változó Poisson-eloszlású.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy Péter összesen 10 üzenetet kap egy nap alatt a két felületen összesen?

(b) Milyen eloszlású az egy nap alatt érkező összes üzenet száma, azaz $X + Y$?

(c) Feltéve, hogy Péter egy nap alatt összesen 10 üzenetet kapott, mennyi a valószínűsége, hogy ebből 5 érkezett emailen, és 5 facebookon?

50. Feladat. Egy szövegben a sajtóhibák száma λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. A lektor a hibákat egymástól függetlenül p valószínűséggel kijavítja, illetve $1 - p$ valószínűséggel nem veszi őket észre.

(a) Határozzuk meg a megmaradó hibák számának eloszlását.

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a megmaradó hibák száma páros?

51. Feladat. Pisti reggel is, este is binomiális eloszlású számú Túrórudit eszik meg. Mi az eloszlása a Pisti által egy nap megevett Túrórudik számának, ha feltételezzük, hogy a reggel és este megevett Túrórudik száma független egymástól és paramétereik $(10; 0,27)$ illetve $(8; 0,27)$?

52. Feladat. Pisti naponta $0,4$-paraméterű geometriai eloszlású felest iszik meg. Mi az általa hetente megivott felesek számának eloszlása, ha feltételezzük, hogy a napi mennyiségek függetlenek egymástól?

53. Feladat. Egy mozipénztár előtt 50-en állnak sorban. Egy jegy 5 ezer Ft-ba kerül, a mozipénztár kasszája üres a nyitás előtt. 30 embernek 5 ezer Ft-osa van és 20 várakozónak pedig 10 ezer Ft-osa. Milyen valószínűséggel nem akad meg a sor?

(2. hét) Geometriai valószínűség, Poincaré-formula, feltételes valószínűség

54. Feladat. Kettétörünk egy 1 m hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát és Y a rövidebbét. Mennyi $\mathbb{P}(X < x)$ és $\mathbb{P}(Y < x)$?

55. Feladat. Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két találomra választott pontjával három részre osztunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkezett szakaszokból szerkeszthető háromszög?

56. Feladat. Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

57. Feladat. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többiektől függetlenül 1/10 eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Mennyi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift?

58. Feladat. n dobozba elhelyezünk n golyót (egy dobozba akárhány golyó kerülhet, és minden lehetőség egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy nem lesz üres doboz? Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy üres doboz lesz?

59. Feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

60. Feladat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy három kockadobásból van legalább egy hatos, feltéve, hogy különböző számokat dobtunk?

61. Feladat. Ákos feldob egy érmét ötvenszer, Bálint ötvenegyszer. Mennyi a valószínűsége, hogy Bálint több fejet dob, mint Ákos?

62. Feladat. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (az esélye, hogy eltalálja a helyes választ, ekkor $\frac{1}{3}$). Mennyi a valószínűsége, hogy helyesen válaszol? Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?

63. Feladat. Egy betegségben a lakosság 2%-a szenved. A betegség kimutatására szolgáló teszt beteg embereknél 95% valószínűséggel mutatja ki a betegséget, ugyanakkor az egészséges embereknél 1% valószínűséggel tévesen betegséget jelez.

(a) Egy véletlenszerűen választott embernél elvégezve a vizsgálatot, mennyi a valószínűsége, hogy a teszt betegséget jelez?

(b) Tamásnál elvégezték a tesztet, az eredmény szerint beteg. Mennyi a feltételes valószínűsége, hogy valóban beteg?

(c) Megismételték a vizsgálatot. Az újabb tesztnél ismét betegséget jelzett a teszt. A két eredmény alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy Tamás beteg? Itt feltehetjük, hogy annak valószínűsége, hogy egy ember vizsgálata esetén mindkétszer betegséget jelez a teszt, annak négyzete, hogy egy alkalommal betegséget mutat ki a teszt.

64. Feladat. Egy dobozban egy jó és egy rossz kábel van. A jó 95% valószínűséggel, a rossz 30% valószínűséggel működik minden kipróbálásnál függetlenül. Találomra kivesszük valamelyik kábelt (mindkettőt azonos valószínűséggel választva). Tízszer kipróbáltuk, ebből nyolcszor működött, kétszer nem. Mennyi a valószínűsége, hogy a jó kábelt vettük ki a dobozból?

Valószínűségszámítás gyakorlat

1. (1. hét) Kombinatorikus valószínűségi mező

Elmélet

Definíció (Ismétlés nélküli permutáció)**.** n (különböző) elem összes lehetséges sorrendje.

$$n!.$$

Definíció (Ismétléses permutáció)**.** n elem összes lehetséges sorrendje, ha ezek közül $k_1, \ldots, k_r$ darab megegyezik.

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r}.$$

Definíció (Ismétlés nélküli kombináció)**.** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Definíció (Ismétléses kombináció)**.** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), van visszatevés.

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Definíció (Ismétlés nélküli variáció)**.** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Definíció (Ismétléses variáció)**.** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), van visszatevés.

$$n^k.$$

Definíció. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: kombinatorikus valószínűségi mező, ha:

- Ω: nemüres véges halmaz
- $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak halmaza. Elemei az események
- P: $\mathcal{A} \to [0;1]$ valószínűség, melyre $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Feladatok

65. Feladat. Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktáblára, hogy ne üssék egymást?

66. Feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

67. Feladat. Ha egy magyarkártya-csomagból (32 lap: piros, zöld, makk, tök) visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

a) pontosan egy piros színű lapot húztunk?

b) legalább egy piros színű lapot húztunk?

68. Feladat. Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

a) egyformák a párok?

b) különbözőek a párok?

69. Feladat. Egy boltban 10 látszólag egyforma számítógép közül 3 felújított, a többi új. Mi a valószínűsége, hogy ha veszünk 5 gépet a laborba, akkor pontosan 2 felújított lesz közöttük?

70. Feladat. Ha a 6 karakteres jelszavunkat véletlenszerűen választjuk a 10 számjegy és a 26 karakter közül, akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 szám lesz benne?

71. Feladat. Az ötöslottónál adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szelvénnyel játszva öttalálatosunk lesz, illetve hogy legalább négyesünk lesz. Mi a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros? (Hogy viszonylik ez utóbbi a visszatevéses esethez?) A lottóhúzásnál $1-90$-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül.

72. Feladat. Egy db. lottó szelvénnyel játszva mennyi az esélye annak, hogy telitalálatunk lesz, négy, három ill. két találatot érünk el?

73. Feladat. Melyik módszerrel nagyobb a telitalálat esélye, ha egy héten játszunk meg két különböző számötöst vagy ha kétszer egymás után ugyanazt?

74. Feladat. X. úr szenvedélyes lottózó, 50 éven át minden héten heti 10 lottó szelvénnyel játszott, úgy, hogy minden héten csupa különböző számot jelölt meg (összesen tehát ötvenet a kilencvenből). Milyen esélye volt arra, hogy valaha is telitalálatot érjen el? Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább egy négyes találatot elér, ha minden héten egy szelvénnyel játszik?

75. Feladat. Ha egy kockával négyszer dobunk, akkor előnyös arra fogadni, hogy a négy dobásból lesz legalább egy hatos. Ha két kockával huszonnégyszer dobunk akkor hátrányos arra fogadni, hogy lesz legalább egy dupla hatos, holott $4/6 = 24/36$-dal (vagyis a dobások számának és a kedvező kimenetel esélyének szorzata megegyezik). Magyarázzuk meg a jelenséget! (A fogadás kedvező ill. hátrányos aszerint, hogy a nyerés esélye meghaladja-e $1/2$-et.)

76. Feladat. A francia labdarúgó-válogatott húszfős keretét edzésen találomra két tízfős csoportba osztják. A keretben négy csatár van összesen. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét csoportba két csatár kerül?

77. Feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy lottóhúzásnál, amikor 1 és 90 közötti számokból visszatevés nélkül sorsolnak ki ötöt,

(a) több a páros, mint a páratlan?
(b) a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekvőek?
