Valószínűségszámítás

4. előadás

Arató Miklós

2024.03.04.

Tartalomjegyzék

Meghatározás és tulajdonságok

Definíció: $\xi \geq 0$ **diszkrét**, ekkor $E\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$.

Definíció: ξ **diszkrét**, ekkor $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, ha $\min(E\xi^+, E\xi^-) < \infty$.

Tulajdonságok:

1) $E(c \cdot \xi) = c \cdot E\xi$.
2) Ha $\xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta$.
3) Ha létezik $E\xi$, akkor $|E\xi| \leq E|\xi|$.
4) Ha létezik $E\xi$, $E\eta$, és $E\xi + E\eta$ értelmes, akkor $E(\xi + \eta) = E\eta + E\xi$ is létezik.
5) Ha $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow E\xi = 0$.

Véges várható érték

A ξ diszkrét valószínűségi változónak létezik és véges a várható értéke, ha $\sum_k |x_k| \cdot P(\xi = x_k) < \infty$. Ekkor

$$E\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k).$$

Diszkrét példák

1) c konstans valószínűségi változó $\Rightarrow Ec = c$.

Diszkrét példák

1) c konstans valószínűségi változó $\Rightarrow Ec = c$.

2) A indikátorárának várható értéke
$E\chi_A = 0 \cdot P(\chi_A = 0) + 1 \cdot P(\chi_A = 1) = P(A)$.

Diszkrét példák

1) c konstans valószínűségi változó $\Rightarrow Ec = c$.

2) A indikátorárának várható értéke
$E\chi_A = 0 \cdot P(\chi_A = 0) + 1 \cdot P(\chi_A = 1) = P(A)$.

3) $\xi \sim B(n, p)$ **binomiális** eloszlású valószínűségi változó.
Ekkor $E\xi = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$np \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}}_{=(p+(1-p))^{n-1}=1} = np.$$

Diszkrét példák

1) c konstans valószínűségi változó $\Rightarrow Ec = c$.

2) A indikátorárának várható értéke
$E\chi_A = 0 \cdot P(\chi_A = 0) + 1 \cdot P(\chi_A = 1) = P(A)$.

3) $\xi \sim B(n, p)$ **binomiális** eloszlású valószínűségi változó.
Ekkor $E\xi = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$np \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}}_{=(p+(1-p))^{n-1}=1} = np.$$

$\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ (független indikátorok összege)$\Rightarrow$
$E\xi = E\eta_1 + \ldots + E\eta_n = np$.

Diszkrét példák folytatás

4) $\xi \sim \lambda$-**Poisson**, ekkor

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=1} = \lambda.$$

Diszkrét példák folytatás

4) $\xi \sim \lambda$-**Poisson**, ekkor

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=1} = \lambda.$$

5) Visszatevés nélkül húzzunk a dobozból. Ekkor a ξ valószínűségi változó **hipergeometrikus** eloszlású, és várható értéke: $E\xi = \sum_{k=0}^{\min(n,M)} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Az egyszerűbb kiszámítás céljából legyen $\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_M$, ahol $\eta_i := 1$, ha az i-edik piros golyót kihúztuk, különben pedig 0. Ekkor $P(\eta_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$, így $E\xi = n \cdot \frac{M}{N}$.

Valószínűségi változók (emlékeztető)

Definíció: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.

Valószínűségi változók (emlékeztető)

Definíció: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.
Definíció: A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan x_i valós számok és A_i teljes eseményrendszer, hogy $\xi = \sum_k x_k \cdot \chi_{A_k}$.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye** $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye** $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

$\lim_{y \downarrow x} F_\xi(y) - F(x) = P(\xi = x)$

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye**
$F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.
$\lim_{y \downarrow x} F_\xi(y) - F(x) = P(\xi = x)$
Diszkrét esetben $P(\xi = x_k) = F_\xi(x_{k+1}) - F_\xi(x_k)$

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Állítás: Az F_ξ eloszlásfüggvényre teljesülnek az alábbiak:

1) F_ξ monoton növő.
2) $\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$ és $\lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
3) F_ξ balról folytonos és jobbról létezik a határértéke minden $x \in \mathbb{R}$ helyen.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, ha $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$ minden $x \in \mathbb{R}$, ahol f véges sok ponttól eltekintve folytonos
f: sűrűségfüggvény

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, ha $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ minden $x \in \mathbb{R}$, ahol f véges sok ponttól eltekintve folytonos

f: sűrűségfüggvény

$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, ds = 1, f(x) \geq 0$

$F'(x) = f(x)$ véges sok pontot kivéve

Egyenletes eloszlás intervallumon

Tekintsünk $[a, b]$-n geometriai valószínűségi mezőt.
$\xi(w) = w$.

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & : \ x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & : \ a < x < b \\ 1 & : \ b \le x \end{cases} .$$

Az ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük az $[a, b]$ intervallumon.
Jelölés: $E(a, b)$ vagy $U(a, b)$.

Sűrűségfüggvény: $f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & : \ x \in [a, b] \end{cases} .$

λ-exponenciális eloszlás

τ: egy izzó élettartama
örökifjú tulajdonság: $P(\tau > t + s \mid \tau > s) = P(\tau > t)$, ahol $t, s > 0$
$G(t) = P(\tau > t)$, így $\frac{G(t+s)}{G(s)} = \frac{P(\tau>t+s\ ,\ \tau>s)}{P(\tau>s)} = G(t)$, azaz
$G(t + s) = G(t) \cdot G(s) \Rightarrow$.
$G(t) = e^{-\lambda t}$ alakú. Mivel $G(t)$ valószínűség, ezért $\lambda > 0$.
Az eloszlásfüggvény balról folytonossága miatt

$$P(\tau < t) \geq \lim_{\varepsilon\searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) \geq \lim_{\varepsilon\searrow 0} P(\tau < t - \varepsilon) = P(\tau < t) \Rightarrow$$

$$P(\tau < t) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}(1 - e^{-\lambda(t-\varepsilon)}) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

λ-exponenciális eloszlás (folyt.)

λ-exponenciális eloszlású:

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 0 & : \ t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & : \ 0 < t \end{cases}$$

sűrűségfüggvény: $f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & : \ t \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & : \ 0 < t \end{cases}$.

Könnyen látható a fordított irány is, tehát, hogy egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó örökifjú eloszlású.

Gamma-eloszlás

$\xi \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$ eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & : \; x \leq 0 \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} & : \; 0 < x \end{cases},$$

ahol $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \, dx$.

(Megj.: $\Gamma(n) = (n-1)!$.)

Standard normális eloszlás

A ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \; (x \in \mathbb{R})$.

$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds =$

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} \, dt \, ds \overset{(\varphi,r)}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \, dr =$

$2\pi \cdot \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\pi \Rightarrow . \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = 1$

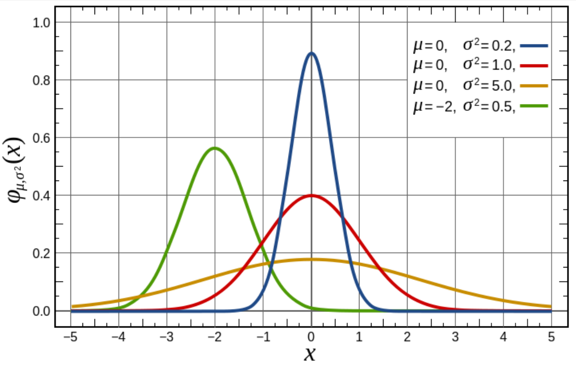
eloszlásfüggvény: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$.

Jelölése: $N(0,1)$.

Normális eloszlás

ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású
$\Rightarrow \eta = m + \sigma\xi$ normális eloszlású.
Eloszlásfüggvénye:
$P(m + \sigma\xi < x) = P(\xi < \frac{x-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$.
A sűrűségfüggvény: $f_{m+\sigma\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.
Ez a normális eloszlás m és σ^2 paraméterekkel, jelölése: $N(m, \sigma^2)$.
Fordítva, ha $\eta \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\frac{\eta - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Haranggörbe



ábra: Normális sűrűségfüggvények

Táblázat

2 *FÜGGELÉK*

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980

Meghatározás

Definíció: $\underline{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ p-dimenziós **valószínűségi vektorváltozó**, ha minden $1 \leq i \leq p$-re ξ_i valószínűségi változó.

Meghatározás

Definíció: $\underline{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ p-dimenziós **valószínűségi vektorváltozó**, ha minden $1 \leq i \leq p$-re ξ_i valószínűségi változó.

Definíció: A $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan $\underline{x_k}$ p-dimenziós vektorok és A_k teljes eseményrendszer, hogy $\underline{\xi} = \sum_k \underline{x_k} \cdot \chi_{A_k}$.

Meghatározás

Definíció: $\underline{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ p-dimenziós **valószínűségi vektorváltozó**, ha minden $1 \leq i \leq p$-re ξ_i valószínűségi változó.

Definíció: A $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan $\underline{x_k}$ p-dimenziós vektorok és A_k teljes eseményrendszer, hogy $\underline{\xi} = \sum_k \underline{x_k} \cdot \chi_{A_k}$.

Definíció: $\underline{\xi}$ **eloszlásfüggvénye**:
$F_{\underline{\xi}}(\underline{x}) := P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_p < x_p)$.

Meghatározás

Definíció: $\underline{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ p-dimenziós **valószínűségi vektorváltozó**, ha minden $1 \leq i \leq p$-re ξ_i valószínűségi változó.

Definíció: A $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan $\underline{x_k}$ p-dimenziós vektorok és A_k teljes eseményrendszer, hogy $\underline{\xi} = \sum_k \underline{x_k} \cdot \chi_{A_k}$.

Definíció: $\underline{\xi}$ **eloszlásfüggvénye**:
$F_{\underline{\xi}}(\underline{x}) := P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_p < x_p)$.

Definíció: $\underline{\xi}$ abszolút folytonos eloszlású, ha $\exists f \geq 0$, hogy

$$F_{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_p} f(s_1, \ldots, s_p) ds_p \ldots ds_1.$$

f : **sűrűségfüggvény**.

Példák

Az $\{1, 2, 3, 4\}$ számokból húzunk visszatevés nélkül. Jelöljük X-el az első húzott számot és Y-al a másodikat.

Példák

Az $\{1, 2, 3, 4\}$ számokból húzunk visszatevés nélkül. Jelöljük X-el az első húzott számot és Y-al a másodikat.
Ekkor $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{12}$, ha $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$ és 0 különben.

Példák

Az $\{1, 2, 3, 4\}$ számokból húzunk visszatevés nélkül. Jelöljük X-el az első húzott számot és Y-al a másodikat.
Ekkor $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{12}$, ha $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$ és 0 különben.

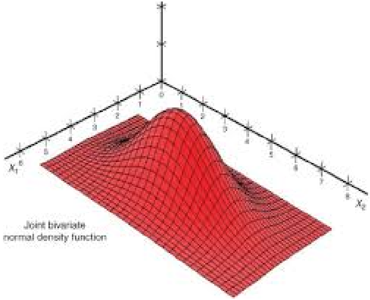
Egy kísérletnek k különböző kimenetele lehet. Az i-edik kimenetel valószínűsége p_i. Jelöljük η_i-vel az i-edik kimenetel gyakoriságát n független kísérletből. Ekkor
$P(\eta_1 = l_1, \eta_2 = l_2, \ldots, \eta_k = l_k) = \frac{n!}{l_1! l_2! \ldots l_k!} p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_k^{l_k}, 0 \leq l_i, l_1 + \ldots, l_k = n$ (multinomiális eloszlás)

Kétdimenziós normális eloszlás

Sűrűségfüggvény:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right\}$$



Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Tétel (biz. nélkül): F pontosan akkor egy p-dimenziós valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha teljesülnek a következők:

1) F minden változóban monoton növő.

2) $\lim\limits_{x_i \searrow -\infty} F_{\underline{\xi}}(\underline{x}) = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$ és $\lim\limits_{x_i \nearrow +\infty, i=1,\ldots,p} F_{\underline{\xi}}(\underline{x}) = 1$.

3) F minden változóban balról folytonos, és jobbról létezik a limesze.

4) Minden $a_k < b_k$ $(k = 1, \ldots, p)$ esetén

$$\sum_{\varepsilon_i=0;1} (-1)^{\sum \varepsilon_k} \cdot F\big(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1)b_1 \ , \ \ldots \ , \ \varepsilon_p a_p + (1-\varepsilon_p)b_p\big) \geq 0$$

Egy $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozóra az utolsó összeg pont $P(a_k < \xi_k < b_k, k = 1, \ldots, p)$.

Meghatározás

Definíció: A $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha $P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i)$ minden $x_1, \ldots, x_n$-re.

Definíció: A $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha minden n-re $\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlenek.

Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ diszkrétek. Ekkor pontosan akkor függetlenek, ha $P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_i)$ minden x_i-re.

Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ abszolút folytonos valószínűségi változók. Itt a függetlenség ekvivalens azzal, hogy $f_{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x_i)$.

Megjegyzések

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlenekre $\{\xi_1 \in B_1\}, \ldots, \{\xi_n \in B_n\}$ független események minden "szép" $B_1, \ldots, B_n$ halmazra.

Konstans valószínűségi változó minden valószínűségi változótól független.

Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlenek és g_i-k "szép" függvények. Ekkor $g_1(\xi_1), \ldots, g_n(\xi_n)$ is függetlenek.

Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlenek és h "szép", k-változós függvény. Ekkor $h(\xi_1, \ldots, \xi_k), \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ is függetlenek.

Konvolúciós formula

Legyenek ξ és η független, abszolút folytonos valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ is abszolút folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-y) \cdot f_\eta(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(y) \cdot f_\eta(x-y)\, dy.$$

Exponenciálisak konvolúciója

$\xi_1, \dots, \xi_n$ független λ-exponenciális valószínűségi változók
$\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \Rightarrow$.

Állítás: η_n sűrűségfüggvénye $g_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{n-1} \cdot \lambda^n \cdot e^{-\lambda x}}{(n-1)!} & x > 0 \end{cases}$.

Bizonyítás: n-re vonatkozó teljes indukció
$n = 1$ rendben . Tegyük fel, hogy n-ig igaz az állítás.
$\Rightarrow (n+1)$-re:

$$g_{n+1}(x) = f_{(\xi_1 + \dots + \xi_n + \xi_{n+1})}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(x-y)}_{g_n(x-y)} \cdot \underbrace{f_{\xi_{n+1}}(y)}_{g_1(y)} \, dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(x-y)^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda(x-y)}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y} \, dy =$$

"Buszok száma"

Olyan autóbuszjárat, ahol a buszok követési ideje egymástól független, azonos λ-exponenciális eloszlású.
ξ_1 : az első busz beérkezési ideje, ξ_2 : az első és a második busz érkezése közötti idő, stb. N busz érkezik $[0,t)$-ben.

$$P(N=n) = P(N \geq n) - P(N \geq n+1) = P(\eta_n < t) - P(\eta_{n+1} < t) =$$

$$\int_0^t \frac{x^{n-1}\lambda^n e^{-\lambda x}}{(n-1)!}dx - \int_0^t \frac{x^n \lambda^{n+1} e^{-\lambda x}}{n!}dx =$$

$$\frac{\lambda^n}{n!}\left\{\int_0^t n x^{n-1} e^{-\lambda x}dx - \underbrace{\int_0^t x^n \lambda e^{-\lambda x}dx}_{[x^n e^{-\lambda x}]_0^t - \int_0^t n x^{n-1} e^{-\lambda x}dx}\right\} = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},$$

Normálisak konvolúciója

Legyenek X és Y független normálisak,
$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,s^2)$. Ekkor összegük sűrűségfüggvénye.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left\{-\frac{y^2}{2s^2}\right\} dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2(1+s^2)-2s^2xy}{2s^2}\right\} dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+s^2)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+s^2)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{s^2}{1+s^2}}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2\frac{s^2}{1+s^2}}\right\} dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+s^2)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+s^2)}\right\} \Rightarrow X+Y \sim N(0,1+s^2)$$

Normálisak konvolúciója (folyt.)

Legyenek ξ és η független normálisak,
$\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Ekkor összegük:

$$\xi + \eta = \sigma_1 \left(\frac{\xi - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\eta - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \mu_1 + \mu_2$$

$$\frac{\xi - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\eta - \mu_2}{\sigma_2} \sim N\left(0, 1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) \Rightarrow$$

$$\sigma_1 \left(\frac{\xi - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\eta - \mu_2}{\sigma_2} \right) \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \Rightarrow$$

$$\xi + \eta \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$