

# Valószínűségszámítás

## 7. előadás

Arató Miklós

2024.03.25.

# Tartalomjegyzék

- 1 Kovariancia
- 2 Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség
- 3 Nagy számok törvénye
- 4 Konvergenciák

# Kovariancia és korreláció

**Definíció:**  $\xi$  és  $\eta$  valószínűségi változók **kovarianciája**

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E\{(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\},$$

**korrelációja**  $R(\xi, \eta) = \text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{D\xi \cdot D\eta}.$

**Tulajdonságok:**

1)  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta.$

2)  $|R(\xi, \eta)| \leq 1 :$

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| = |E\{(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\}| \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \sqrt{E(\xi - E\xi)^2 \cdot E(\eta - E\eta)^2} = D\xi \cdot D\eta.$$

# Cauchy-egyenlőtlenség

**Tétel:** Tetszőleges véges várható értékű  $X, Y$  v.v.-ra  
 $(E(XY))^2 \leq EX^2 EY^2$

**Bizonyítás:**

Tetszőleges valós  $\lambda$ -ra igaz, hogy  $0 \leq E(X - \lambda Y)^2 \Rightarrow$   
 $0 \leq \lambda^2 EY^2 - 2\lambda E(XY) + EX^2 \Rightarrow 4(E(XY))^2 - 4EX^2 EY^2 \leq 0.$

## Kovariancia és korreláció tulajdonságok

3)  $|R(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow$  létezik  $a \neq 0$  és  $b$ , hogy  $\xi = a\eta + b$ .

**Biz.:**  $\Leftarrow$

létezik ilyen  $a$  és  $b \Rightarrow \xi - E\xi = a(\eta - E\eta)$ ,  $D^2\xi = a^2 D^2\eta \Rightarrow$   
 $D\xi = |a|D\eta$ ,  $\text{cov}(\xi, \eta) = aE(\eta - E\eta)^2 = aD^2\eta \Rightarrow$

$$R = \frac{aD^2\eta}{|a|D\eta D\eta} = \frac{a}{|a|}$$

$\Rightarrow$

$$R(\xi, \eta) = 1$$

$$\xi' = \frac{\xi - E\xi}{D\xi}, \eta' = \frac{\eta - E\eta}{D\eta} \Rightarrow$$

$$E\xi' = E\eta' = 0 \text{ és } D^2\xi' = D^2\eta' = 1 \Rightarrow$$

$$E(\xi'\eta') = 1, E(\xi' - \eta')^2 = E\xi'^2 - 2E(\xi'\eta') + E\eta'^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\xi' = \eta' \Rightarrow$$

$\xi$  az  $\eta$ -nak lineáris transzformáltja

# Kovariancia és korreláció tulajdonságok

4)  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek  $\Rightarrow R(\xi, \eta) = 0$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta = E\xi \cdot E\eta - E\xi \cdot E\eta = 0.$$

5)  $\min_{a,b} E(\xi - a\eta - b)^2 = E(\xi - m_1 - r \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot (\eta - m_2))^2 = (1 - r^2) \cdot \sigma_1^2,$

ahol  $m_1 = E\xi$ ,  $m_2 = E\eta$ ,  $\sigma_1^2 = D^2\xi$ ,  $\sigma_2^2 = D^2\eta$  és  
 $r = R(\xi, \eta)$ .

**Biz.:**

$$\begin{aligned} E(\xi - a\eta - b)^2 &= E(\xi - m_1 - a(\eta - m_2) + m_1 - am_2 - b)^2 = \\ &= \sigma_1^2 + a^2\sigma_2^2 + \underbrace{(m_1 - am_2 - b)^2}_{=m_1 - am_2} - 2a \cdot \underbrace{\text{cov}(\xi, \eta)}_{=r \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \end{aligned}$$

$$= \sigma_1^2 + \underbrace{a^2\sigma_2^2 - 2a \cdot r\sigma_1\sigma_2}_{(a\sigma_2 - r\sigma_1)^2 - r^2\sigma_1^2} = (1 - r^2) \cdot \sigma_1^2 + (a\sigma_2 - r\sigma_1)^2 \Rightarrow$$

$$a = r \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

## Egyenlőtlenségek

**Tétel:** [Markov-egyenlőtlenség]: Legyen  $\xi$  nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik az  $E\xi$  várható értéke, továbbá legyen  $c$  pozitív szám. Ekkor  $P(\xi \geq c) \leq \frac{E\xi}{c}$ .

**Bizonyítás:** Csak diszkrétetre.

$$E\xi = \sum_k x_k P(\xi = x_k) \geq \sum_{k: x_k \geq c} x_k P(\xi = x_k) \geq \sum_{k: x_k \geq c} c P(\xi = x_k) = P(\xi \geq c)$$

**Tétel**[Csebisev-egyenlőtlenség]: Ha  $\xi$  szórásnégyzete véges, azaz  $D^2\xi < \infty$ , valamint  $0 \leq \lambda$ , akkor teljesül a

$$P(|\xi - E\xi| \geq \lambda) \leq \frac{D^2\xi}{\lambda^2} \text{ egyenlőtlenség.}$$

**Bizonyítás:** A Markov-egyenlőtlenségből könnyen adódik, hiszen az  $\eta := (\xi - E\xi)^2$  választással  $P(\eta \geq \lambda^2) \leq \frac{E\eta}{\lambda^2} = \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$ .

## Példa

Egy párt szavazótáborát szeretnénk megbecsülni úgy, hogy legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk. Jelölje  $N$  az összes ember,  $M$  a kérdéses pártra szavazók,  $n$  pedig a megkérdezettek számát, ekkor  $p := \frac{M}{N}$ -et akarjuk jól közelíteni. Legyen továbbá  $x_i$  értéke 1, ha az  $i$ -edik megkérdezett az adott pártra szavaz és 0 különben. Ekkor a

$$P\left(\left|\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - \frac{M}{N}\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, ami pontosan akkor igaz, ha  $P\left(\left|\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq 0,05$ . A Csebisev-egyenlőtlenség

alapján  $P\left(\left|\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)}{0,01^2}$ , ahol

$$\frac{\frac{1}{n^2} D^2(\sum x_i)}{0,01^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p(1-p)}{0,01^2} = \frac{10000 \cdot p(1-p)}{n} \leq \frac{10000 \cdot \frac{1}{4}}{n} \leq \frac{5}{100}, \text{ tehát}$$

$n \geq 50000$  ember választása biztosan elegendő. 



# Törvény

**Tétel**[A nagy számok gyenge törvénye]: Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$  páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók,  $D^2 \xi_i < \infty$  és  $E \xi_i = m$ . Ekkor minden  $0 < \varepsilon$ -ra

$$P \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

**Biz.:** Tudjuk, hogy  $E \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right) = n \cdot m$ . Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenséget felhasználva

$$P \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{D^2 \left( \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot D^2 \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n D^2 \xi_i}{\varepsilon^2} =$$
$$\frac{1}{n} \cdot \frac{D^2 \xi_1}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

## Példa

Tekintsünk független kísérleteket, minden kísérlet legyen  $p$  valószínűséggel sikeres.

Jelölje  $\eta_n$  a sikeres kísérletek számát az első  $n$  kísérletben. Ekkor  $P(|\frac{\eta_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

Legyen ugyanis  $\eta_n = X_1 + \dots + X_n$ , ahol  $X_i = 1$ , ha az  $i$ -edik kísérlet sikeres, különben pedig 0.

Továbbá  $EX_i = p$  és  $D^2 X_i = p(1 - p)$ . Így  $X_i$ -kre teljesülnek az előbbi tétel feltételei, tehát a relatív gyakoriság tart  $p$ -hez.

# Sztocasztikus konvergencia

**Definíció:** A  $\xi_n$  valószínűségi változó-sorozat **sztocasztikusan tart**  $\xi$ -hez, ha minden  $0 < \varepsilon$ -ra  $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  esetén. Jelölése:  $\xi_n \Rightarrow \xi$  (vagy  $\xi_n \xrightarrow{st.} \xi$ ).

**Állítás:** Ha  $\xi_n \Rightarrow \xi$ , akkor  $P(\xi_n < x) \rightarrow P(\xi < x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ), ez utóbbi minden folytonossági pontjában.

# Bizonyítás

Legyen  $A_n := \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$ . Ekkor

$$P(\xi_n < x) = P((\xi_n < x) \cap A_n) + P((\xi_n < x) \cap \overline{A_n}) \leq$$

$$P((\xi_n < x) \cap A_n) + P(\overline{A_n}) =$$

$$P(((\xi_n - \xi) < (x - \xi)) \cap A_n) + P(\overline{A_n}) \leq$$

$$P(\xi < x + \varepsilon, A_n) + P(\overline{A_n}) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + P(\overline{A_n}) \Rightarrow$$

$$\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + \limsup P(\overline{A_n}), \text{ ahol}$$

$$\limsup P(\overline{A_n}) = 0 \text{ minden } 0 < \varepsilon\text{-ra} \Rightarrow$$

Ha  $x$  folytonossági pontja  $P(\xi < x)$ -nek, akkor

$$\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x).$$

# Bizonyítás (folyt.)

$$P(\xi_n < x) \geq P(\xi_n < x, A_n) = P(\xi_n + \xi < x + \xi, A_n) =$$

$$P(\xi < x + \xi - \xi_n, A_n) \geq P(\xi < x - \varepsilon, A_n) =$$

$$P(\xi < x - \varepsilon) - P(\xi < x - \varepsilon, \overline{A_n}) \geq$$

$$P(\xi < x - \varepsilon) - P(\overline{A_n}) \Rightarrow$$

$$\liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x - \varepsilon) - \limsup P(\overline{A_n}), \text{ ahol}$$

$$\limsup P(\overline{A_n}) = 0 \Rightarrow \liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x - \varepsilon) \text{ minden}$$

$$0 < \varepsilon\text{-ra} \Rightarrow \liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x).$$

A folytonossági pontokban  $\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x)$  és

$$\liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x) \Rightarrow \lim P(\xi_n < x) = P(\xi < x).$$

# Következmény

Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$  páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók,  $D^2\xi_i < \infty$  és  $E\xi_i = m$ . Ekkor minden  $a < m < b$ -re

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} < a\right) \rightarrow 0 \text{ és}$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} < b\right) \rightarrow 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

# Konvergenciák

## Definíció:

$\xi_n \rightarrow \xi$  **eloszlásban**, ha  $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\xi(x)$  az utóbbi minden folytonossági pontjában.

$\xi_n \rightarrow \xi$  **majdnem mindenütt**, ha  $P(w : \xi_n(w) \rightarrow \xi(w)) = 1$ . [1 valószínűségű konvergencia].

$\xi_n \rightarrow \xi$   **$L^p$ -ben**, ha  $E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Állítás:** Ha  $\xi_n \rightarrow \xi$   $L^p$ -ben, akkor  $\xi_n \Rightarrow \xi$

## Bizonyítás:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \rightarrow 0.$$

## Példa

$\xi_n$  tart  $\xi$ -hez majdnem mindenütt, de  $L^p$ -ben nem

$\Omega := [0, 1]$  geometriai valószínűségi mező

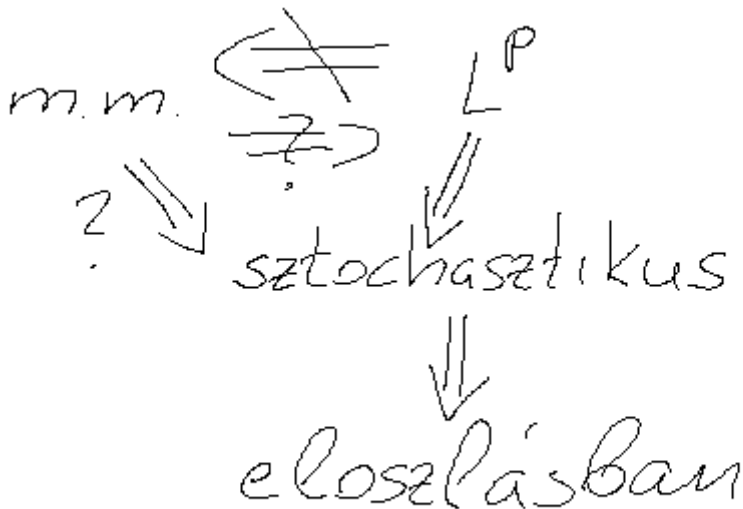
$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} e^n & : \omega \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & : \omega \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases} .$$

Ekkor  $\xi_n \rightarrow 0$  majdnem mindenütt, viszont

$$E|\xi_n|^p = \frac{1}{n}e^{np} + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 0 = \frac{e^{np}}{n} \not\rightarrow 0.$$



## Konvergenciák következményei



## Példák

Legyen  $\xi = \pm 1 \frac{1}{2}$  valószínűséggel és  $\xi_n = (-1)^n \xi$ . Ekkor  $\xi_n$  eloszlásban tart  $\xi$ -hez, de sztochasztikusan nem.

**Állítás:** Legyenek  $\xi_j$ -k azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, melyek eloszlásban konvergálnak egy  $c$  konstanshoz. Ekkor  $\xi_n \Rightarrow c$ .

**Bizonyítás:** Minden  $0 < \varepsilon$ -ra

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 1 - P(\xi_n < c + \varepsilon) + P(\xi_n \leq c - \varepsilon) \leq 1 - P(\xi_n < c + \varepsilon) + P(\xi_n < c - \varepsilon/2) \rightarrow 1 - 1 + 0, n \rightarrow \infty,$$

# 1 valószínűségű konvergencia

**Állítás:**  $\xi_n \rightarrow \xi$  majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha  
 $\lim_{m \rightarrow \infty} P(\sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$  minden pozitív  $\varepsilon$ -ra.

**Bizonyítás:** Csak a  $\Leftarrow$  irányt látjuk be. Legyen

$$A = \{w : \xi_n(w) \rightarrow \xi(w)\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} \left\{ w : |\xi_n(w) - \xi(w)| \leq \frac{1}{r} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{A} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} \left\{ w : |\xi_n(w) - \xi(w)| > \frac{1}{r} \right\}.$$

Így  $\xi_n \rightarrow \xi$  majdnem mindenütt pontosan akkor, ha  $P(\bar{A}) = 0$ .

# Bizonyítás folytatása

$$\bigcup_{n \geq m} \{w : |\xi_n(w) - \xi(w)| > \frac{1}{r}\} = \{w : \sup_{n \geq m} |\xi_n(w) - \xi(w)| > \frac{1}{r}\} = B_{r,m} \Rightarrow .$$

$$B_{r,m} \supseteq B_{r,m+1} \supseteq B_{r,m+2} \supseteq \dots$$

$$B_r = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{r,m} \Rightarrow P(B_r) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} P(B_{r,m}) = 0.$$

$$B_r \subseteq B_{r+1} \subseteq B_{r+2} \subseteq \dots \text{ és } \bar{A} = \bigcup_r B_r \Rightarrow P(\bar{A}) \leq \sum P(B_r) = 0 \Rightarrow$$

állítás

# Következmények

Ha  $\xi_n \rightarrow \xi$  majdnem mindenütt, akkor  $\xi_n$  sztochasztikusan is konvergál  $\xi$ -hez, ugyanis

$$P(|\xi_m - \xi| > \varepsilon) \leq P\left(\sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$  minden pozitív  $\varepsilon$ -ra, akkor  $\xi_n \rightarrow \xi$

majdnem mindenütt, ugyanis  $P\left(\sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) =$

$$P\left(\bigcup_{n \geq m} \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

## Borel-Cantelli lemmák

Legyen az  $A_n$  eseménysorozatra  $\liminf \bar{A}_l := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{l=n}^{\infty} \bar{A}_l$ , illetve

$$\limsup A_k := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Ekkor  $w \in \liminf \bar{A}_l$  pontosan akkor teljesül, ha  $w$  az  $A_n$ -ek közül csak véges soknak eleme, illetve  $w \in \limsup A_k$  pontosan akkor teljesül, ha  $w$  végtelen sok  $A_n$ -nek eleme.

### Borel-Cantelli-lemmák

1) Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , akkor az  $A_n$ -ek közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be.

2) Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$  és az  $A_n$ -ek függetlenek, akkor az  $A_n$ -ek közül 1 valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik.

# Borel-Cantelli lemmák bizonyítása

1)  $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , azaz 0 valószínűséggel következik be végtelen sok, így 1-gyel véges sok.

2)  $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right)$ , ahol

$$P\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) \leq P\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^m P(\overline{A_k}) \leq e^{-\sum_{k=n}^m P(A_k)}, \text{ ami}$$

$n \rightarrow \infty$  esetén 0-hoz tart. (Az utolsó becslésnél felhasználtuk, hogy  $1 - x \leq e^{-x}$ .)

# Példa

$\xi_n$  tart  $\xi$ -hez  $L^p$ -ben, de nem tart majdnem mindenütt:

Legyenek  $\xi_n$ -ek függetlenek,  $P(\xi_n = 1) = d_n$ ,

$P(\xi_n = 0) = 1 - d_n$  és  $E|\xi_n|^p = d_n$ .

$\xi_n$  sorozat pontosan akkor tart  $L^p$ -ben 0-hoz, ha  $d_n \rightarrow 0$ .

$\xi_n$  pontosan akkor tart 0-hoz majdnem mindenütt, ha 1 valószínűséggel véges sok  $\xi_n$  nem 0, ami pedig a Borel-Cantelli-lemma szerint ekvivalens azzal, hogy  $\sum d_n$  véges.

Például a  $d_n = \frac{1}{n}$  választás esetén  $\xi_n \not\rightarrow 0$  majdnem mindenütt, viszont  $L^p$ -ben igen.