

Valószínűségszámítás

9. előadás

Arató Miklós

2024.04.15.

Tartalomjegyzék

- 1 Nagy számok erős törvénye
- 2 Moivre-Laplace tétel és egyéb közelítések
- 3 Centrális határeloszlástétel

Emlékeztető

Nagy számok Cantelli-féle erős törvénye: ξ_1, ξ_2, \dots
független, azonos eloszlású valószínűségi változók és
 $E|\xi_n - E\xi_n|^4$ véges. Ekkor $\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \rightarrow E\xi_1$ 1 valószínűséggel.

Példa

A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n -el. Mihez tart X_n ?

Példa

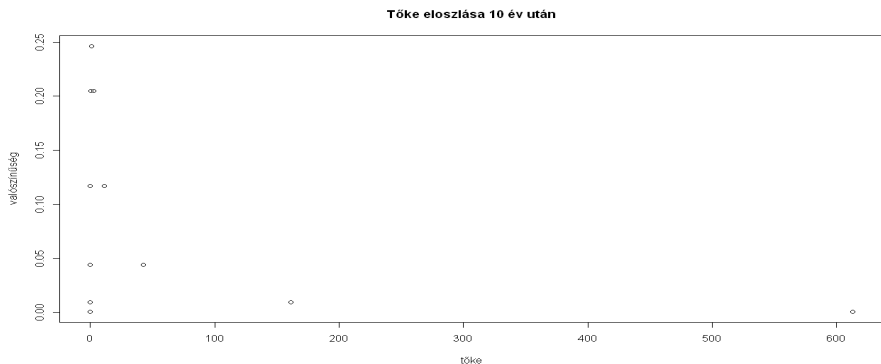
A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n -el. Mihez tart X_n ?

A részvény várható éves hozama 20%.

Y_n : hányszorosára változik a részvény árfolyama az n -edik évben $\Rightarrow X_n = Y_1 \dots Y_n$ és $EX_n = EY_1 \dots EY_n = 1,2^n \Rightarrow EX_n \rightarrow +\infty$

Egy tipikus HUNCUT részvényárváltozás

Példa folytatása



ábra: A HUNCUT részvény eloszlása

Példa folytatása

$$X_n = \exp \{ \ln Y_1 + \dots + \ln Y_n \}.$$

Nagy számok erős törvénye \Rightarrow

$$\frac{\ln Y_1 + \dots + \ln Y_n}{n} \rightarrow E(\ln Y_1) = \frac{1}{2} \ln(0,95) < 0 \text{ (1 valószínűséggel).}$$

$$\Rightarrow X_n = \left(\exp \left\{ \frac{\ln Y_1 + \dots + \ln Y_n}{n} \right\} \right)^n \rightarrow 0 \text{ (1 valószínűséggel).}$$

Előző példa folytatása

Minden év végén tőként felét a HUNCUT részvénybe fektetjük, a másik felét azonban párnánk alatt készpénzben tartjuk.

Z_n : tőkénk n év múlvaibeli értéke. Tőkénk várható éves hozama $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 190\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 50\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%) - 100\% = 10\%$.

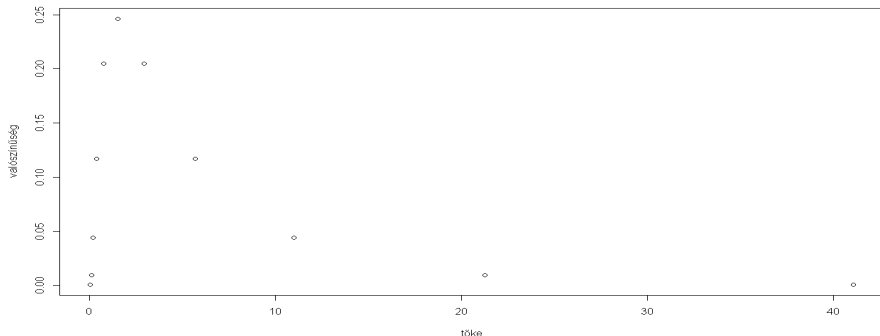
U_n : hányszorosára változik a részvény árfolyama az n -edik évben.

$Z_n = U_1 \dots U_n$ és $EZ_n = EU_1 \dots EU_n = 1,1^n \rightarrow +\infty$

Tőkeváltozás új stratégiával

Példa folytatása

Tőke eloszlása 10 év után (óvatosabb befektetési politikával)



ábra: Tőkénk eloszlása, ha mindig csak a felét fektetjük be a HUNCUT részvénybe

Példa folytatása

$$Z_n = \exp \{ \ln U_1 + \dots + \ln U_n \}.$$

$\frac{\ln U_1 + \dots + \ln U_n}{n} \rightarrow E(\ln U_1) = \frac{1}{2} \ln(1,45 \cdot 0,75) > 0$ (1 valószínűséggel). \Rightarrow

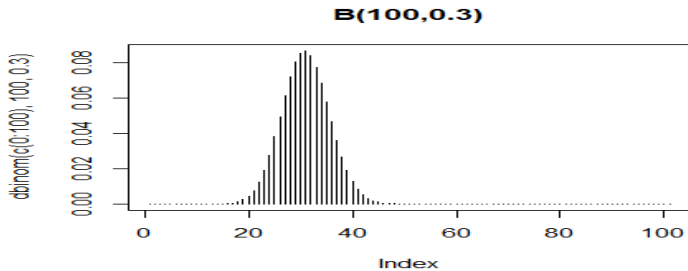
$$Z_n = \exp \left(\frac{\ln U_1 + \dots + \ln U_n}{n} \right)^n \rightarrow +\infty \text{ (1 valószínűséggel)}$$

Binomiális eloszlás

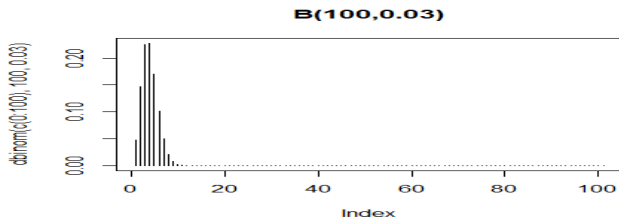
Legyenek η_i -k független, azonos eloszlású p -indikátorok, és

$$U_n = \sum_{i=1}^n \eta_i, \text{ ekkor } U_n \sim B(n, p).$$

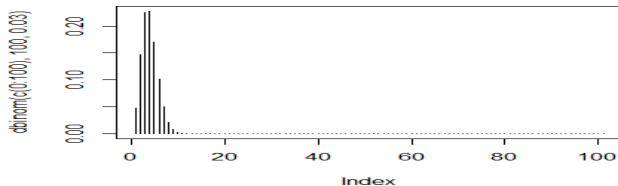
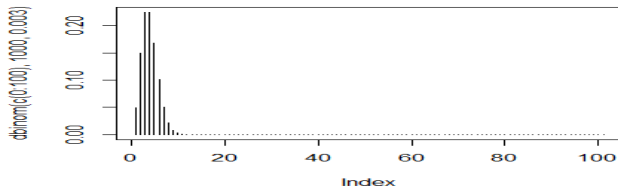
$$P(U_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$



Binomiális eloszlás



Binomiális eloszlás

B(100,0.03)**B(1000,0.003)**

Moivre-Laplace lokális tétel

$U_n \sim B(n, p)$ és legyen A rögzített szám, $q = 1 - p$ és $np - A\sqrt{n} \leq k \leq np + A\sqrt{n}$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(U_n = k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2 \cdot npq}}} = 1.$$

Megjegyzés: $EU_n = np$ és $D^2U_n = npq$. Egy np várható értékű és npq szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a k helyen pont:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2 \cdot npq}}$$

Moivre-Laplace bizonyítása

Stirling-formula egy alakja:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{R(n)}, \text{ ahol}$$

$$|R(n)| \leq \frac{1}{12n} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} P(U_n = k) &= \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}}{\sqrt{2\pi(n-k)} \cdot (n-k)^{n-k} \cdot e^{-(n-k)} \cdot \sqrt{2\pi k} \cdot k^k \cdot e^{-k}} \cdot e^{R(n)-R(n-k)-R(k)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n \cdot \frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n}}} \cdot \underbrace{\left[\frac{p}{\binom{k}{n}} \right]^k \cdot \left[\frac{1-p}{\binom{n-k}{n}} \right]^{n-k}}_{A_n} \cdot \underbrace{e^{R(n)-R(n-k)-R(k)}}_{\rightarrow 1} \end{aligned}$$

Moivre-Laplace bizonyítása (folyt.)

$$A_n = ?$$

Legyen $k = np + x\sqrt{np(1-p)}$ és

$n - k = n(1-p) - x\sqrt{np(1-p)}$, ahol $|x| \leq B$.

$$\begin{aligned}\ln A_n &= -k \cdot \ln\left(\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{p}\right) - (n-k) \cdot \ln\left(\frac{n-k}{n} \cdot \frac{1}{1-p}\right) = \\ &= -(np + x\sqrt{np(1-p)}) \cdot \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{1-p}{np}}\right) - (n(1-p) \\ &\quad - x\sqrt{np(1-p)}) \cdot \ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}\right).\end{aligned}$$

Moivre-Laplace bizonyítása (folyt.)

$$|y| < 1 \text{ esetén } \ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3) \Rightarrow$$

$$\ln \left(1 + x \sqrt{\frac{1-p}{np}} \right) = x \sqrt{\frac{1-p}{np}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1-p}{np} + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

és

$$\ln \left(1 - x \sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} \right) = -x \sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{p}{n(1-p)} + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

Moivre-Laplace bizonyítása (folyt.)

$$\begin{aligned} \ln A_n &= -x\sqrt{np(1-p)} + \frac{x^2}{2}(1-p) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - x^2(1-p) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O \\ &+ x\sqrt{np(1-p)} + \frac{x^2}{2}p + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - x^2p + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Így } x = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \Rightarrow \text{Tétel}$$

Poisson közelítés

Állítás: Legyen $\lambda = np$, $\eta \sim \lambda$ -Poisson és $D \subseteq \mathbb{R}$, ekkor igaz a következő:

$$|P(U_n \in D) - P(\eta \in D)| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Megjegyzés: Rögzített λ -ra és $p = \frac{\lambda}{n}$ -re kapjuk, hogy

$$|P(U_n \in D) - P(\eta \in D)| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Poisson közelítés

Állítás: Legyen $\lambda = np$, $\eta \sim \lambda$ -Poisson és $D \subseteq \mathbb{R}$, ekkor igaz a következő:

$$|P(U_n \in D) - P(\eta \in D)| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Megjegyzés: Rögzített λ -ra és $p = \frac{\lambda}{n}$ -re kapjuk, hogy

$$|P(U_n \in D) - P(\eta \in D)| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Általánosabban is megnézhetjük. Legyenek $\eta_i \sim p_i$ -indikátorok függetlenek, $U_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$, $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$, $\eta \sim \lambda$ -Poisson és

$$D \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow |P(U_n \in D) - P(\eta \in D)| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$$

Poisson közelítés bizonyítása

Legyen $\Omega = [0, 1]^n$ geometriai valószínűségi mező,

$$\eta_i = \begin{cases} 0 & : w_i < 1 - p_i \\ 1 & : w_i \geq 1 - p_i \end{cases}, \text{ továbbá legyen}$$

$$Y_i = \begin{cases} 0 & : w_i < e^{-p_i} \\ k & : w_i \in [\pi_{k-1}, \pi_k] \end{cases}, \text{ ahol } \pi_k = \sum_{m=0}^k e^{-p_i} \cdot \frac{p_i^m}{m!}$$

$(k = 0, 1, 2, \dots) \Rightarrow$

$Y_i \sim p_i$ -Poisson és $\eta_i \sim p_i$ -indikátor.

Poisson közelítés bizonyítása (folyt.)

$$\eta = Y_1 + \dots + Y_n \sim \lambda\text{-Poisson és } 1 - p_i \leq e^{-p_i} \Rightarrow$$

$$\eta_i = 1 \text{ és } Y_i = 0, \text{ ha } 1 - p_i \leq w_i < e^{-p_i}$$

$$\eta_i = 1 \text{ és } Y_i \geq 2, \text{ ha } e^{-p_i} + p_i \cdot e^{-p_i} \leq w_i \Rightarrow$$

$$P(\eta_i \neq Y_i) = (e^{-p_i} - (1 - p_i)) + 1 - e^{-p_i} - p_i \cdot e^{-p_i} = p_i \cdot (1 - e^{-p_i}) \leq p_i^2.$$

$$P(U_n \in D) = P(U_n \in D, U_n = \eta) + P(U_n \in D, U_n \neq \eta) = P(\eta \in D) - P(\eta \in D, U_n \neq \eta) + P(U_n \in D, U_n \neq \eta) \Rightarrow$$

$$|P(U_n \in D) - P(\eta \in D)| \leq |P(\eta \in D, U_n \neq \eta) - P(U_n \in D, U_n \neq \eta)| \leq P(U_n \neq \eta) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 \Rightarrow \text{Állítás}$$

Poisson közelítés (példa)

Legyenek $\eta_i \sim p_i, i = 1, \dots, 2500$ -indikátorok függetlenek,
 $p_i = 0.001, i = 1, \dots, 1000; p_i = 0.002, i = 1001, \dots, 2000; p_i =$
 $0.003, i = 2001, \dots, 2500; U_n = \sum_{i=1}^{2500} \eta_i, \lambda = \sum_{i=1}^{2500} p_i = 4.5, \eta \sim$
 4.5-Poisson.

Ekkor $|P(U_n \in D) - P(\eta \in D)| \leq P(U_n \neq \eta) \leq \sum_{i=1}^{2500} p_i^2 = 0.0095$

Tétel [Centrális határeloszlástétel független, azonos eloszlású változókra]: Legyenek

ξ_1, ξ_2, \dots független, azonos eloszlásúak, $m := E\xi_1$ és $0 < \sigma^2 = D^2\xi_j < \infty$. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ -re

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n \cdot m}{\sigma \cdot \sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Normális közelítés

Példa 1.

Egy országban meg szeretnék becsülni a koronavírussal fertőzöttek arányát úgy, hogy legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk.

Példa 1.

Egy országban meg szeretnék becsülni a koronavírussal fertőzöttek arányát úgy, hogy legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk. Jelölje N az ország lakosai, M a koronavírussal fertőzöttek számát, n pedig a megvizsgáltak számát, ekkor $p := \frac{M}{N}$ -et akarjuk jól közelíteni. Legyen továbbá X_i értéke 1, ha az i -edik megvizsgált koronavírussal fertőzött és 0 különben. Ekkor a

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{M}{N}\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

Példa 1. (folyt.)

A centrális határeloszlástétel szerint

$$P \left(\frac{-\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \right) \sim$$
$$\sim \Phi \left(\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \right) - \Phi \left(\frac{-\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \right) = 2 \cdot \Phi \left(\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \right) - 1 \geq 0,9$$

azaz $\Phi \left(\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \right) \geq 0,975 = \Phi(1,96)$, tehát legyen

$\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \geq 1,96$. Ezzel $\sqrt{n} \geq 1,96 \cdot \frac{1}{0,01} \cdot \sqrt{p(1-p)}$, ha ¹
 $n \geq 10000$, tehát ha normális közelítéssel dolgozunk, kb. 10 000 embert kell megkérdezni.

¹mivel a $\sqrt{p(1-p)}$ nem lehet nagyobb 0,5-nél, így a jobb oldal felülről
becsülhető 98-cal

Példa 2.

Mihez tart a következő: $e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$

Ha végtelenig összegeznénk, nyilván 1 lenne az összeg, de most $n - 1$ -ig megyünk!

Példa 2. (folyt.)

Legyenek $\eta_i \sim 1$ -Poisson függetlenek, ezekre teljesülnek a centrális határeloszlástétel feltételei, azaz felírható:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i - n \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \Phi(x), \text{ ahol } \sum_{i=1}^n \eta_i \sim n\text{-Poisson, így}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n \eta_i < n\right) = e^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}.$$

$$\text{Ekkor speciálisan } x = 0\text{-ra } P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i - n}{\sqrt{n}} < 0\right) \rightarrow \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Tehát a keresett összeg $\frac{1}{2}$ -hez tart.