Valószínűségszámítás gyakorlat

1. (1. hét) Kombinatorikus valószínűségi mező

Elmélet

Definíció (Ismétlés nélküli permutáció)**.** n (különböző) elem összes lehetséges sorrendje.

$$n!.$$

Definíció (Ismétléses permutáció)**.** n elem összes lehetséges sorrendje, ha ezek közül $k_1, \ldots, k_r$ darab megegyezik.

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r}.$$

Definíció (Ismétlés nélküli kombináció)**.** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Definíció (Ismétléses kombináció)**.** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje nem számít (nem számozottak, címkézettek az elemek), van visszatevés.

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Definíció (Ismétlés nélküli variáció)**.** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), nincs visszatevés.

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Definíció (Ismétléses variáció)**.** n (különböző) elemből k darabot kiveszünk, a kihúzás sorrendje számít (számozottak, címkézettek az elemek), van visszatevés.

$$n^k.$$

Definíció. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: kombinatorikus valószínűségi mező, ha:

- Ω: nemüres véges halmaz
- $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak halmaza. Elemei az események
- P: $\mathcal{A} \to [0; 1]$ valószínűség, melyre $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Feladatok

1. Feladat. Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktáblára, hogy ne üssék egymást?

2. Feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

3. Feladat. Ha egy magyarkártya-csomagból (32 lap: piros, zöld, makk, tök) visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

a) pontosan egy piros színű lapot húztunk?

b) legalább egy piros színű lapot húztunk?

4. Feladat. Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

a) egyformák a párok?

b) különbözőek a párok?

5. Feladat. Egy boltban 10 látszólag egyforma számítógép közül 3 felújított, a többi új. Mi a valószínűsége, hogy ha veszünk 5 gépet a laborba, akkor pontosan 2 felújított lesz közöttük?

6. Feladat. Ha a 6 karakteres jelszavunkat véletlenszerűen választjuk a 10 számjegy és a 26 karakter közül, akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 szám lesz benne?

7. Feladat. Az ötöslottónál adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szelvénnyel játszva öttalálatosunk lesz, illetve hogy legalább négyesünk lesz. Mi a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros? (Hogy viszonylik ez utóbbi a visszatevéses esethez?) A lottóhúzásnál $1-90$-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül.

8. Feladat. Egy db. lottó szelvénnyel játszva mennyi az esélye annak, hogy telitalálatunk lesz, négy, három ill. két találatot érünk el?

9. Feladat. Melyik módszerrel nagyobb a telitalálat esélye, ha egy héten játszunk meg két különböző számötöst vagy ha kétszer egymás után ugyanazt?

10. Feladat. X. úr szenvedélyes lottózó, 50 éven át minden héten heti 10 lottó szelvénnyel játszott, úgy, hogy minden héten csupa különböző számot jelölt meg (összesen tehát ötvenet a kilencvenből). Milyen esélye volt arra, hogy valaha is telitalálatot érjen el? Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább egy négyes találatot elér, ha minden héten egy szelvénnyel játszik?

11. Feladat. Ha egy kockával négyszer dobunk, akkor előnyös arra fogadni, hogy a négy dobásból lesz legalább egy hatos. Ha két kockával huszonnégyszer dobunk akkor hátrányos arra fogadni, hogy lesz legalább egy dupla hatos, holott $4/6 = 24/36$-dal (vagyis a dobások számának és a kedvező kimenetel esélyének szorzata megegyezik). Magyarázzuk meg a jelenséget! (A fogadás kedvező ill. hátrányos aszerint, hogy a nyerés esélye meghaladja-e $1/2$-et.)

12. Feladat. A francia labdarúgó-válogatott húszfős keretét edzésen találomra két tízfős csoportba osztják. A keretben négy csatár van összesen. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét csoportba két csatár kerül?

13. Feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy lottóhúzásnál, amikor 1 és 90 közötti számokból visszatevés nélkül sorsolnak ki ötöt,

(a) több a páros, mint a páratlan?
(b) a kihúzott számok a húzás sorrendjében növekvőek?
