Valószínűségszámítás gyakorlat

(4. hét) Függetlenség, együttes eloszlás, konvolúció, várható érték

1. Feladat. Célbalövéskor háromszor próbálkozhatunk. Az első lövésnél 60 %, a másodiknál 70 %, a harmadiknál 80 % eséllyel találjuk el a célt, az egyes lövéseknél egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) egyszer sem találjuk el a célt?

(b) csak a harmadik lövésnél találunk célba?

(c) egyszer sem találjuk el a célt, feltéve, hogy az első lövést elhibáztuk?

(d) feltéve, hogy összesen kétszer találtunk célba, az első lövés sikeres volt?

(e) Adjuk meg az első sikeres találat sorszámának és az összes találat számának az együttes eloszlását (ha nincs találat, az első sikeres találat sorszáma helyett írjunk 0-t).

2. Feladat. Húzzunk egy franciakártya-csomagból két lapot visszatevés nélkül. Jelölje X a kihúzott kárók, Y az ászok számát. (Ötvenkét lap van a csomagban, ebből 13 káró és 4 ász, káró ászból pedig egy van.)

(a) Adjuk meg X és Y együttes eloszlását.

(b) Igaz-e, hogy X és Y függetlenek?

(c) Mennyi $X + Y$ várható értéke? Mennyi $3X + 5Y$ várható értéke?

3. Feladat. Egy cukrászdában kétféle fagylaltot árulnak. Tegyük fel, hogy az egy nap alatt eladott kis adag fagylaltok száma Poisson-eloszlású, várható értéke 50, a nagy adagok száma ettől független, Poisson-eloszlású, várható értéke 100.

(a) Adjuk meg az $(X, X + Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását és a peremeloszlásait is.

(b) Feltéve, hogy $X + Y = 5$, milyen eloszlású X?

(c) Igaz-e, hogy $X + Y$ és $X - Y$ függetlenek?

(d) Mennyi a napi bevétel várható értéke, ha a kis adag 300, a nagy adag 400 forintba kerül?

4. Feladat. Egy szoftver frissítéséhez 68 fájlt kell telepíteni, amik egymástól függetlenül 10mp várható értékű és 2mp szórású, normális eloszlású ideig töltődnek.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy a teljes frissítés lezajlik 12 percen belül?
b) A cég a következő frissítésnél azt ígéri, hogy az már 95% valószínűséggel 10 percen belül betöltődik. Hány fájlból állhat ez a frissítés?
$(\Phi(2,42) = 0,992, \Phi(1,645) = 0,95)$

5. Feladat. Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

6. Feladat. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Egymástól függetlenül mindenki választ a 10 emelet közül egyet (mindegyiket azonos valószínűséggel), ahol kiszáll. Várhatóan hány emeleten áll meg a lift?

7. Feladat. Mennyi az ötöslottón kihúzott

a) számok összegének várható értéke?

b) páros számok számának várható értéke?

c) a kihúzott páros számok összegének várható értéke?

8. Feladat. Tegyük fel, hogy egy dobozban van $2N$ kártyalap, melyek közül kettõn 1-es, kettõn 2-es szám van és így tovább. Válasszunk ki véletlenszerûen m lapot. Várhatóan hány pár marad a dobozban?

9. Feladat. Egy bányász a bánya egyik termében rekedt, ahonnan három út nyílik. Az első egy három perces út végén a szabadba vezet. A második út öt, a harmadik hét percnyi séta után visszatér ugyanebbe a terembe. A bányász minden alkalommal a többi választástól függetlenül egyenlő valószínűséggel választ egyet az utak közül. Legyen X a szabadba jutáshoz szükséges idő. Mennyi X várható értéke?

10. Feladat. Szerencsejátékot játszunk, amely során minden fordulóban a feltett tétet $\frac{1}{2}$ valószínűséggel megduplázzuk, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig elveszítjük. Kezdetben 1 petákunk van. Addig folytatjuk, amíg 5 petákunk nem lesz vagy el nem fogy az összes pénzünk. Várhatóan hány játszmát fogunk játszani, ha a mohó stratégiát követjük, azaz mindig akkora tétet választunk, amennyi az öthöz hiányzik, vagy ha ez nem lehetséges, akkor az összes pénzünket feltesszük? Várhatóan hány játszmát fogunk játszani, ha az óvatos stratégiát követjük, és minden lépésben egy petákot teszünk fel?