Valószínűségszámítás gyakorlat

(8. hét) Momentumok, kovariancia, korrelációs együttható, konvergenciák

1. Feladat. Mennyi egy gamma eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete?

2. Feladat. Mennyi egy Pareto eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete?

3. Feladat. Legyenek X és Y független egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $(0,1)$ intervallumon. Mennyi $R(\min(X,Y),\max(X,$

4. Feladat. Tegyük fel, hogy egy ember (szisztolés) vérnyomása minden mérésnél 120 Hgmm várható értékű, 10 szórású valószínűségi változó. Legyen X és Y két vérnyomásmérés eredménye, és tegyük fel, hogy elég sok idő eltelt a két mérés között ahhoz, hogy feltehessük, hogy a mérési eredmények egymástól függetlenek.
(a) Mennyi a két mérés átlagának várható értéke és szórása?
(b) Mennyi lenne a mérések átlagának várható értéke és szórása $n = 10$, illetve $n = 100$ mérés esetén?
(c) Ha n mérés van, mennyi az első k mérés átlagának és az összes mérés átlagának a korrelációs együtthatója?

5. Feladat. Egy csoportban 25-en tanulnak. Tegyük fel, hogy a tanulók születésnapjai függetlenek és az év tizenkét hónapjában egyenletes eloszlásúak. Számítsuk ki azon hónapok számának a várható értékét és szórását, amelyekre egy születésnap sem esik.

6. Feladat. Egy elektromos vezetékgyártó cég 40 m-es vezetékeket gyárt $0,2$ m szórással. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vezeték hossza legalább 1 m-rel eltér a várható 40 m-es értéktől? Mennyi a pontos érték, ha feltesszük még azt is, hogy a hossz normális eloszlású?

7. Feladat. Legalább mekkora valószínűséggel állíthatjuk, hogy egy szabályos érmével végzett 100-as dobássorozatban a fejdobások száma legalább 44 és legfeljebb 56? Mit mondhatunk 1000-es dobássorozat esetén arról, hogy a fejdobások száma legalább 440 és legfeljebb 560?

8. Feladat. Legyenek az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek. Milyen értelemben konvergensek az alábbi sorozatok, és mi a limeszük?

(a) X_i független p paraméterű indikátorváltozó; $Y_n = (X_1^5 + \ldots + X_n^5)/n$.

(b) X_i az i. szabályos kockadobás eredménye; $Y_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$; illetve $Z_n = (X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n$.

(c) X_i exponenciális eloszlású 2 paraméterrel (azaz sűrűségfüggvénye $f(x) = 2e^{-2x}\mathbb{I}(x > 0)$; $Y_n = (e^{X_1} + \ldots + e^{X_n})/n$, illetve $Z_n = \frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}{n}$.

9. Feladat. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen x^{-5}, ha $x > c$, és 0 különben.

(a) Határozzuk meg c értékét.

(b) Feltéve, hogy $X > 2c$, mennyi a valószínűsége, hogy $X > 3c$?

(c) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ az X-szel azonos eloszlású, egymástól független valószínűségi változók. Határozzuk meg az

$$\frac{X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_n^3}{n}$$

limeszét sztochasztikus, illetve 1 valószínűségű értelemben, ha ezek a limeszek léteznek $n \to \infty$ esetén.