

Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak matematika felvételi példasor
2011.05.30.

Tesztkérdések. Rossz válasz: -1 pont, minden egyes jó válasz 3 pont.

1. Az X és Y független valószínűségi változók sűrűségfüggvényei

$$f_x(t) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-2)^2}{18}\right), f_y(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-3)^2}{8}\right), -\infty < t < \infty.$$

a) Mennyi $X + 2Y$ várható értéke?

A: 8	B: -8	C: 25	D: más	E: -7	F: 49
------	-------	-------	--------	-------	-------

b) Mennyi $X - 2Y$ szórásnégyzete?

A: 5	B: 40	C: 25	D: más	E: -7	F: 49
------	-------	-------	--------	-------	-------

2. Szabályos dobókockával dobunk. X -el jelöljük az első 6-os dobás sorszámát. Mennyi a valószínűsége, hogy $X \geq 3$?

A: 25/36	B: 11/36	C: 1/2	D: más	E: 4/9	F: 5/9
----------	----------	--------	--------	--------	--------

3. Az X_1, X_2, \dots független, a $(1, 3)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

a) Mihez tart sztochasztikusan $(2X_1 + 2X_2 + \dots + 2X_n)/n$?

A: nem konvergál	B: 0-hoz	C: 0,25-höz	D: máshoz	E: 4-hez	F: 1-hez
------------------	----------	-------------	-----------	----------	----------

b) Mi a határértéke $P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - 2n}{\sqrt{n}} < 0\right)$ -nek?

A: nincs határértéke	B: 0	C: 0,5	D: más	E: $\sqrt{3}/2$	F: 1
----------------------	------	--------	--------	-----------------	------

4. Az Y valószínűségi változó $1/2$ várható értékű exponenciális eloszlású. Mi $2Y$ sűrűségfüggvénye pozitív x -ekre?

A: e^{-x}	B: $4e^{-4x}$	C: $0,5e^{-0,5x}$	D: $0,25e^{-0,25x}$	E: más	F: 0,25 [0,4]-en
-------------	---------------	-------------------	---------------------	--------	------------------

5. $P(X=-2)=1/3, P(X=2)=2/3$.

a) Mennyi X várható értéke?

A: 2/3	B: 2	C: 0	D: más	E: nem létezik	F: 1/3
--------	------	------	--------	----------------	--------

b) X eloszlásfüggvénye a 4 helyen:

A: 1/3	B: 1	C: 2/3	D: más	E: nem létezik	F: 2
--------	------	--------	--------	----------------	------

c) X karakterisztikus függvénye az 1 helyen:

A: 10/3	B: 2	C: 0	D: más	E: nem létezik	F: $(\sin 2)/3$
---------	------	------	--------	----------------	-----------------

d) X szórásnégyzete:

A: 32/9	B: 2	C: 0	D: más	E: nem létezik	F: 1
---------	------	------	--------	----------------	------

6. A $[0,1] \times [0,1]$ egységnyezetből választunk ki egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont 0,2-nél távolabb lesz a négyzet átlójától?

A: más	B: 0,64	C: 0,04	D: $(1 - 0,2\sqrt{2})^2$	E: 0,2	F: 0,8
--------	---------	---------	--------------------------	--------	--------

7. Egy diák $1/3$ valószínűséggel tudja a tesztkérdésre adandó helyes választ. Amennyiben nem tudja a helyes választ, akkor tippel (4 lehetséges válasz van, $1/4$ valószínűséggel jót választ). A diák jól választott. Mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?

A: 4/7	B: 4/6	C: 4/5	D: más	E: 1/3	F: 1/4
--------	--------	--------	--------	--------	--------

8. Egy dobozban 10 piros és 15 fehér golyó van. Kétszer húzunk a dobozból visszatevéssel (az első húzás után a kivett golyót visszatevesszük). X jelöli a kihúzott piros golyók számát, Y a fehér golyók számát.

a) Mi X eloszlása?

A: Binomiális eloszlású 2 és 0,4 paraméterekkel	B: Binomiális eloszlású 25 és 0,4 paraméterekkel	C: 0,4 paraméterű Poisson-eloszlású	D: más	E: Hipergeometrikus (10,15,2) paraméterekkel	F: 0,8 paraméterű Poisson-eloszlású
---	--	-------------------------------------	--------	--	-------------------------------------

b) Mennyi X és Y korrelációja?

A: 1	B: -1	C: 0,5	D: más	E: -0,5	F: -0,25
------	-------	--------	--------	---------	----------

9. Két dobókockával dobunk egyszer. Mennyi a valószínűsége, hogy két 5-öst dobunk, ha tudjuk, hogy legalább az egyik szám 5-ös volt?

A: 1/11	B: 9	C: 1/9	D: 0	E: más	F: 1/3
---------	------	--------	------	--------	--------

10. Egy kísérletsorozatnál megfigyeléseink a következők: 3, 1, 8, 7, 6.

a) Mi a minta tapasztalati 2. momentuma?

A: 8,5	B: 6,8	C: 31,8	D: 25	E: 49	F: más
--------	--------	---------	-------	-------	--------

b) Mi a minta terjedelme?

A: 5	B: 8	C: 7	D: 22	E: 6	F: más
------	------	------	-------	------	--------

c) Mi a tapasztalati eloszlásfüggvény értéke a 0 helyen?

A: 6/10	B: 2/3	C: 2/5	D: 1/2	E: 1	F: más
---------	--------	--------	--------	------	--------

d) Mennyi a minta korrigált tapasztalati szórásnégyzete?

A: 8,5	B: 6,8	C: 34	D: 25	E: 31,8	F: más
--------	--------	-------	-------	---------	--------

e) Feltételezzük, hogy megfigyeléseink egyenletes eloszlásúak a $[0,a]$ intervallumon. Mi az a paraméter maximum likelihood becslése?

A: 6,8	B: 8,5	C: 8	D: 10	E: 5	F: más
--------	--------	------	-------	------	--------

11. Mennyi az n -elemű $[0,a]$ intervallumon egyenletes eloszlású minta Fisher-féle információmennyisége?

A: $-n/a^2$	B: n/a^2	C: $-n/a$	D: n/a	E: n/a^2	F: egyéb
-------------	------------	-----------	----------	------------	----------

12. Egy 120 fős évfolyamból 40-en nem mertek elmenni a statisztika vizsgára, 70-en megbuktak és 10-en sikeresen vizsgáztak. Nullhipotézisünk az, hogy a három esemény egyenlő valószínűségű. χ^2 próbát alkalmazunk. Az alábbi állítások közül pontosan egy igaz. Melyik?

A: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elutasítjuk a nullhipotézist.	B: Mind az 1%-os, mind az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elfogadjuk a nullhipotézist.	C: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elfogadjuk.
D: Az 1%-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 5 és 10%-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elutasítjuk.	E: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elfogadjuk a nullhipotézist, miközben az 10%-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elutasítjuk.	F: Az 1 és 5 %-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elutasítjuk a nullhipotézist, miközben az 10%-os elsőfajú hibavalószínűség próbánál elfogadjuk.

13. Melyik az igaz állítás a következők közül?

- A: Egyszerű nullhipotézisnél és ellenhipotézisnél a valószínűséghányados próba a legerősebb az ő terjedelmével.
 B: A maximum likelihood becslés nem lehet torzítatlan.
 C: A másodfajú hiba mindig kisebb az elsőfajánál.
 D: A maximum likelihood becslés mindig torzítatlan.

14. Melyik a hamis állítás a következők közül?

- A: Minden valószínűségi változónak létezik karakterisztikus függvénye.
 B: Független, korlátos valószínűségi változók összegének várható értéke várható értékek összege.
 C: Az L^2 konvergenciából következik az egy valószínűségi konvergencia.
 D: Minden karakterisztikus függvény abszolút értéke kisebb 3-nál.

Név (nyomatott betűkkel):

Tesztkérdések megoldása:

1a	1b	2	3a	3b	4	5a	5b	5c	5d	6	7	8a
8b	9	10a	10b	10c	10d	10e	11	12	13	14	15	

A következő feladatokat külön lapon dolgozza ki!

1. Legyenek X, Y független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozza meg $X+Y$ eloszlását! (8 pont)

2. Mennyi a lottón (90-ből 5) kihúzott számok összegének várható értéke? (5 pont)

3. Mihez tart (és hogyan?) n független kockadobás mértani közepe? (8 pont)

4. X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{x+y}{2}\right), & \text{ha } x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{máshol.} \end{cases}$

Határozzuk meg $E(X|Y)=!$ (12 pont)

5. Legyen (X_n, F_n) nemnegatív szupermartingál és $A_n = \{X_n = 0\}$. Mutassa meg, hogy ekkor $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ m.m., azaz $P(A_n \setminus A_{n+1}) = 0$! (5 pont)

6. Egy 4 elemű $N(m, 4^2)$ eloszlású független minta tapasztalati közepe 3. Konstruáljon 95%-os megbízhatóságú konfidencia intervallumot m -re! (A levezetés is szükséges!) (7 pont)