Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak matematika felvételi
2017. május 5.

I. rész

Tesztkérdések. Rossz válasz: -1 pont, minden egyes jó válasz 2 pont. A válaszokat írja a szöveg utáni táblázatba (a szövegben megjelölt válaszokat nem fogjuk elfogadni). A Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

1.) Egy halastóban 200 hal van: 100 ponty, 50 csuka és 50 keszeg. Gábor három halat szeretne kifogni. Tegyük fel, hogy mindegyik hal azonos valószínűséggel akad a horgára. Jelölje X azt, hogy a három kifogott hal közül hány lesz keszeg. Milyen eloszlású X?
A: binomiális **B**: negatív binomiális **C**: geometriai **D**: hipergeometriai **E**: más

2.) Legyenek X és Y független, binomiális eloszlású valószínűségi változók, $n = 2$ renddel és $p = 1/2$ paraméterrel. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(XY = 0)$ valószínűséget.
A: 0 **B**: 1/16 **C**: 1/4 **D**: 7/16 **E**: 1/2 **F**: más

3.) Tegyük fel, hogy egy üzletben az egy óra alatt érkező vásárlók száma Poisson-eloszlású. Továbbá, egy óra alatt várhatóan három vevő tér be az üzletbe. Mennyi a valószínűsége, hogy az üzletbe egy óra alatt senki sem jön be?
A: $1/e^3$ **B**: 1/3 **C**: 0 **D**: $3/e^3$ **E**: más

4.) Hanna minden nap a többitől függetlenül 0,6 valószínűséggel hatos, 0,4 valószínűséggel négyes villamossal érkezik az egyetemre. Feltéve, hogy a múlt hét öt tanítási napja alatt összesen kétszer jött hatossal, mennyi a valószínűsége, hogy múlt pénteken hatos villamossal érkezett az egyetemre?
A: $\frac{1}{5}$ **B**: $\frac{2}{5}$ **C**: $\frac{3}{5}$ **D**: $\frac{1}{2}$ **E**: más

5.) Legyen (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = c$, ha $1 < x < 3$ és $2 < y < 5$, és 0 különben (megfelelő c-vel). Mennyi a $\mathbb{P}(X < 2, Y > 4)$ valószínűség?
A: $\frac{1}{2}$ **B**: $\frac{1}{4}$ **C**: $\frac{1}{6}$ **D**: $\frac{1}{8}$ **E**: más

6.) Két szabályos dobókockánk van. Az egyiken az $1, 2, 3, 4, 5, 6$, a másikon a $2, 2, 4, 4, 6, 6$ számok szerepelnek. Kiválasztjuk valamelyik kockát véletlenszerűen (mindkettőt azonos valószínűséggel), és dobunk vele egyszer. A dobás értékét jelölje Y. Mennyi Y eloszlásfüggvényének értéke a π helyen?
A: 1/12 **B**: 1/6 **C**: 5/12 **D**: $\pi/12$ **E**: más

7.) Tegyük fel, hogy a holnapi középhőmérséklet (Celsius-fokban mérve) normális eloszlású $m = 14$ várható értékkel és $\sigma = 2$ szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet 12 és 20 fok közé esik?
A: $\Phi(6) + \Phi(2) - 1$ **B**: $\Phi(6) - \Phi(2)$ **C**: $\Phi(3) - \Phi(1) + 1$ **D**: $\Phi(20) - \Phi(12)$
E: $\Phi(3) + \Phi(1) - 1$

8.) Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $3x^2$, ha $0 \le x \le 1$, és 0 különben. Mennyi a $\sqrt{X}$ valószínűségi változó várható értéke?
A: 2/7 **B**: 2/5 **C**: 6/7 **D**: $\sqrt{3}/2$ **E**: $\sqrt{3}$ **F**: más

9.) Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ egymástól független, a $[0, 2]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.
a) Hova tart $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ sztochasztikusan, ha $n \to \infty$?
A: $\frac{1}{4}$-hez **B**: $\frac{1}{2}$-hez **C**: 1-hez **D**: 2-höz **E**: nem konvergál
b) Mennyi lesz az alábbi határérték: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|(X_1 + \ldots + X_n)/n - 1| < 1/\sqrt{3n})$?
A: $1 - \Phi(\sqrt{3})$ **B**: $\Phi(1)$ **C**: $2\Phi(1) - 1$ **D**: $\Phi(\sqrt{3})$ **E**: $\Phi(2)$

10.) Melyik állítások igazak a normális eloszlású minta szórásnégyzetének maximum likelihood becslésére? (Annyiszor két pontot lehet szerezni, ahány igaz állítás van.)
A: torzítatlan **B**: konzisztens **C**: a tapasztalati medián függvénye
D: a várható érték maximum likelihood becslése megkapható a függvényeként
E: a négyzetgyöke a szórás torzítatlan becslése

11.) Az alábbiak közül válassza ki az igaz állítás(oka)t! (Annyiszor két pontot lehet szerezni, ahány igaz állítás van.)
A: A tapasztalati szórásnégyzet torzítatlan becslés a szórásnégyzetre (ha az véges).
B: A mintaátlag minden mintában nagyobb a mediánnál.
C: A mintaátlag a várható érték konzisztens becslése (ha véges a várható érték).
D: Poisson-eloszlású minta esetén az összeg elégséges statisztika a paraméterre.
E: F-próbával normális eloszlás várható értékéről szóló hipotéziseket lehet tesztelni.
F: A tapasztalati eloszlásfüggvény pontonkénti limesze az eloszlásfüggvény.

12.) Egy dobókockával dobtunk ötvenszer. Az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok gyakoriságai rendre $6, 8, 7, 9, 13, 7$ lettek (tehát például nyolc darab kettes dobás lett).
a) Mennyi a minta tapasztalati eloszlásfüggvényének értéke az $5,5$ helyen, azaz $\hat{F}_n(5,5)$?
A: 0 **B**: 0,13 **C**: 0,86 **D**: 13 **E**: más
b) Milyen próbát alkalmazna annak ellenőrzésére, hogy szabályos-e a dobókocka?
A: u-próba **B**: Student-féle t-próba **C**: F-próba **D**: χ^2-próba

13.) Milyen c konstansra igaz, hogy létezik olyan valószínűségi változó, melynek karakterisztikus függvénye $c \cdot \cos^2 t$?
A: 0 **B**: 1 **C**: $\sqrt{2\pi}$ **D**: 2 **E**: nincs ilyen c

14.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, 0 várható értékű, 1 szórású valószínűségi változók, és $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Milyen c számra lesz az $S_n^2 - cn$ sorozat martingál az alábbi σ-algebra sorozatra nézve: $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_j : 1 \le j \le n\}$.
A: 0 **B**: 1/2 **C**: 1 **D**: 2 **E**: nincs ilyen c szám

15.) Legyenek X és Y független valószínűségi változók, mindkettőnek 1 a várható értéke és 2 a szórása. Az alábbiak közül melyik lesz az $\mathbb{E}(X^2Y|Y)$ feltételes várható érték?
A: 3 **B**: 5 **C**: $3Y$ **D**: $5Y$ **E**: egyik sem

Azonosító:

Tesztkérdések megoldása:

1	2	3	4	5	6	7	8	9a	9b	10

11	12a	12b	13	14	15

II. rész

Kifejtős feladatok. A következő feladatok megoldását a kapott lapokon dolgozza ki! Minden feladat 6 pontot ér. A teljes pontszámhoz helyes végeredmény és jó indoklás is szükséges.

1.) Mennyi a $D^2(X-Y)$ lehető legkisebb értéke, ha az X valószínűségi változó szórása 2, az Y valószínűségi változóé pedig 1? Adjon is példát, olyan esetre, amikor éppen ennyi az érték.

2.) Tegyük fel, hogy egy szobát szeretnénk kifesteni, amihez $2,9$ kg festék kell. A Φ függvény (a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye) segítségével fejezze ki annak valószínűségét, hogy három festékes doboz elég lesz, ha dobozok névleg 1 kg-osak, de valójában a bennük lévő festék mennyisége 1 kg várható értékű és $0,1$ kg szórású normális eloszlású valószínűségi változó.

3.) 30-szor feldobunk egy szabályos dobókockát, jelölje X a dobott hatosok, Y pedig a dobott egyesek számát. Számítsuk ki X és Y korrelációs együtthatóját.

4.) Tegyük fel, hogy két technológiával gyártott alkatrészünk van. Mindkét típus élettartama exponenciális eloszlású, de az első technológiával gyártottaké λ, a másodiké 2λ paraméterű. Adjon maximum likelihood becslést az ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterre, ha az első típusból n, a második típusból m alkatrész élettartamát figyeltük meg.

5.) Legyenek a, b ismeretlen paraméterek (a valós, $b > 0$), $X_1, \ldots, X_n$ pedig független minta az $[a-b, a+2b]$ intervallumon egyenletes eloszlásból. Adjon becslést momentummódszerrel az a és b paraméterekre.

Azonosító:

Pontozás (a javító tölti ki):

	1	2	3	4	5	Összesen
II. rész						
I. rész						
Mindösszesen						