Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak matematika felvételi
2018. május 22.

I. rész

Tesztkérdések. Rossz válasz: -1 pont, minden egyes jó válasz 2 pont. A válaszokat írja a szöveg utáni táblázatba (a szövegben megjelölt válaszokat nem fogjuk elfogadni). A Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

1.) Laci kapott egy doboz desszertet, melyben 24 édesség volt: 10 csokis és 14 epres. Először a barátait kínálta meg: 6 barátja véletlenszerűen vett egy-egy édességet a dobozból (azaz minden barát, amikor rákerült a sor, a dobozban lévő édességek mindegyikét egyforma valószínűséggel vette ki).
a) Jelölje X, hogy a 6 barát összesen hány epres édességet vett ki. Milyen eloszlású X?
A: Poisson **B**: geometriai **C**: hipergeometriai **D**: binomiális **E**: más
b) Várhatóan hány csokis desszert maradt Lacinak?
A: 7 **B**: 7,5 **C**: 8 **D**: 9 **E**: más

2.) Legyen X egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon. Melyik állítás igaz?
A: X és X^2 független.
B: X és X^2 korrelálatlan de nem független.
C: X és X^2 korrelációs együtthatója pozitív.
D: X és X^2 korrelációs együtthatója negatív.

3.) Legyen $1,4,2,7$ geometriai eloszlásból származó minta, ahol p ismeretlen paraméter (azaz $P(X_i=k)=(1-p)^{k-1}p$, $k=1,2,\ldots$).
a) Mi lesz a likelihood függvény?
A: $p^{14}(1-p)^4$ **B**: $p^{10}(1-p)^4$ **C**: $p^4(1-p)^{14}$ **D**: $p^4(1-p)^{10}$ **E**: más
b) Mennyi a tapasztalati eloszlásfüggvény értéke az $x=1{,}3$ helyen?
A: 0 **B**: 1/4 **C**: 2/4 **D**: 3/4 **E**: 1

4.) Egy menhelyen 16 fajtatiszta és 16 keverék macska él. A fajtatiszták közül 11, a keverékek közül 9 állat beteg. Azt a nullhipotézist vizsgáljuk khi-négyzet próbával, hogy a betegség független a fajtatisztaságtól. Mennyi a próbastatisztika értéke?
A: 8/15 **A**: 20/9 **B**: 1/16 **D**: 0 **E**: más

5.) Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 1/2. Mennyi a $P(X>5|X>3)$ feltételes valószínűség?
A: $1-e^{-4}$ **B**: $1-e^{-10}$ **C**: e^{-4} **D**: e^{-10} **E**: más

6.) Legyenek X és Y függetlenek és azonos $\lambda=4$ paraméterű Poisson eloszlásúak. Mennyi a $P(X+Y=5)$ valószínűség?
A: $e^{-8}\frac{4^{10}}{(5!)^2}$ **B**: $e^{-4}\frac{4^5}{5!}$ **C**: $e^{-5}\frac{5^8}{8!}$ **D**: $e^{-8}\frac{8^5}{5!}$ **E**: más

7.) Legyenek X és Y független, azonos binomiális eloszlású valószínűségi változók $n=3$ renddel és $p=0{,}2$ paraméterrel. Mennyi X és $X+Y$ kovarianciája?
A: 0,48 **B**: 0,5 **C**: 0,96 **D**: 1 **E**: más

8.) Legyen X egy megfigyelés a $(-a,a)$ intervallumon egyenletes eloszlásból. Hipotéziseink: $H_0: a=3$, $H_1: a=4$. A következő próbát végezzük: ha $|X|>2{,}5$, akkor elutasítjuk H_0-t, egyébként elfogadjuk. Mekkora a próba ereje?
A: 1/6 **B**: 5/6 **C**: 3/8 **D**: 5/8 **E**: más

9.) Egy urnában 13 golyó van, köztük k darab piros $(0<k<13)$, a többi fehér. Kétszer húzunk az urnából *visszatevéssel.* Legyen A az az esemény, hogy az elsőnek kihúzott golyó piros, és B az az esemény, hogy a két kihúzott golyó különböző színű. Az A és a B esemény pontosan akkor független, ha $k=$
A: 2 **B**: 3 **C**: 5 **D**: 8 **E**: 10 **F**: nincs ilyen k **G**: más

10.) Legyenek X_i, $i=1,2,\ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók a következő eloszlással: $P(X_i=0)=P(X_i=4)=0{,}5$. Legyen továbbá $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$. Mely állítás(ok) igaz(ak), ha $n\to\infty$? (Annyiszor két pontot lehet szerezni, ahány igaz állítás van.)
A: $S_n/n\to 2$, sztochasztikusan **B**: $S_n/n\to 2$, 1 valószínűséggel
C: $P(S_n<2n+3\sqrt{n})\to\Phi(0{,}75)$ **D**: $P(S_n<3n)\to 1/2$

11.) Mely(ek) eloszlásfüggvény(ek) az alábbiak közül? (Annyiszor két pontot lehet szerezni, ahány eloszlásfüggvény van.)
A: $F(x)=x^2/(1+x^2)$ ha $x>0$, és 0 különben
B: $F(x)=\Phi(x^3-x)$
C: $F(x)=0$ ha $x<0$, $F(0)=1/2$, és $F(x)=1$ ha $x>0$
D: $F(x)=\min(1;0{,}3e^x)$

12.) Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye (a teljes számegyenesen) $\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-x^2/8+x/2-1/2}$. Mennyi X várható értéke?
A: 2 **B**: 1 **C**: 0 **D**: 4 **E**: nem létezik **F**: más

13.) Legyen $X_1,\ldots,X_n$ Poisson eloszlású minta ismeretlen $\lambda>0$ paraméterrel. Milyen c számra igaz, hogy $1/2\cdot s_n^{*2}+c\cdot\overline{X}$ torzítatlan becslése a λ paraméternek? Itt s_n^{*2} a minta korrigált tapasztalati szórásnégyzetét, míg $\overline{X}$ a minta átlagát jelöli.
A: 0 **B**: 1/2 **C**: 1 **D**: tetszőleges c megfelelő **E**: nincs ilyen c

14.) Legyen az X valószínűségi változó eloszlása: $P(X=-1/2)=P(X=1/2)=1/2$. Mi lesz a karakterisztikus függvénye?
A: $\cos(t/2)$ **B**: $\cos(t/2)+i\sin(t/2)$ **C**: $\frac{1}{2}\cos(t)$ **D**: $\cos(t/2)-i\sin(t/2)$ **E**: más

---

Azonosító:

Tesztkérdések megoldása:

1a	1b	2	3a	3b	4	5	6	7	8	9

10	11	12	13	14

II. rész

Kifejtős feladatok. A következő feladatok megoldását a kapott lapokon dolgozza ki! Minden feladat 8 pontot ér. A teljes pontszámhoz helyes végeredmény és jó indoklás is szükséges.

1.) Legyen X egyenletes eloszlású a $0, 1, 2$ számokon, Y pedig $3/4$ valószínűséggel 1, $1/8$ valószínűséggel 2, $1/8$ valószínűséggel pedig 3. Mennyi lesz a $P(X + Y = 1)$ valószínűség minimuma, illetve maximuma?

2.) Egy szabályos érmével négyszer dobunk. Jelölje X a fejek számát az első két dobásból, Y pedig a fejek számát az utolsó három dobásból. Mennyi lesz $E(2X + 4Y|X)$?

3.) Legyenek X_i, $i = 1, 2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók a következő eloszlással: $P(X_i = 1) = 2/3$, $P(X_i = -1) = 1/3$. Továbbá legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Milyen $c \neq 1$ esetén lesz $Y_n = c^{S_n}$ martingál az $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ σ-algebra sorozatra nézve?

4.) Legyenek X, Y, Z független, a $(-1, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az $X + 2Y - Z$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét $t \neq 0$ esetén!

5.) Egy szerencsejáték-automata négyféle számot tud kipörgetni: 1-est $p/5$ eséllyel, 2-est $4p/5$ eséllyel, 3-ast $(2/3 - p)$ eséllyel, és 4-est $1/3$ eséllyel, ahol $0 < p < 2/3$ ismeretlen paraméter. 15 menet eredménye a következő lett:

$$4, 2, 2, 3, 1, 3, 4, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 3, 2.$$

Adjunk p-re maximum likelihood becslést!

Azonosító:

Pontozás (a javító tölti ki):

	1	2	3	4	5	Összesen
II. rész						

I. rész	
Mindösszesen	