Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak matematika felvételi
2019. május 10.

I. rész

Tesztkérdések. Rossz válasz: -2 pont, minden egyes jó válasz 4 pont. A válaszokat írja a szöveg utáni táblázatba (a szövegben megjelölt válaszokat nem fogjuk elfogadni). A Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

1.) Legyenek X és Y olyan független valószínűségi változók, melyek várható értéke 2 illetve 3, szórásnégyzete 1 és 4.

a) Mennyi $5 + X - Y$ várható értéke?

A: 4 **B**: 5 **C**: 10 **D**: 6 **E**: más

b) Mennyi $5 + X - Y$ szórásnégyzete?

A: 30 **B**: 5 **C**: 3 **D**: -3 **E**: más

c) Mennyi $X - 2Y$ és $X + Y$ kovarianciája?

A: 3 **B**: 5 **C**: -3 **D**: $1/3$ **E**: más

2.) Legyen X egyenletes eloszlású a $(-1, 1)$ intervallumon.

a) Mennyi eloszlásfüggvényének értéke az $x = 0$ helyen?

A: $\Phi(1)$ **B**: nincs értelmezve **C**: $0,5$ **D**: 0 **E**: más

b) Mennyi X^2 szórásnégyzete?

A: $\frac{1}{9}$ **B**: $\frac{1}{5}$ **C**: $\frac{14}{45}$ **D**: $\frac{8}{45}$ **E**: más

3.) Legyen $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ független, azonos λ-paraméterű Poisson eloszlásból származó minta, ahol λ ismeretlen paraméter

a) Az alábbi becslések közül melyik torzítatlan $\lambda^5 e^{-\lambda}$-ra? (I az indikátor függvény)

A: $5!I(X_1 = 5)$ **B**: $5!I(X_1 < 5)$ **C**: $5!I(X_1 \leq 5)$ **D**: $\frac{X_1 + ... + X_n}{n}$ **E**: előzőek egyike sem

b) Amennyiben n tart végtelenhez, úgy a minta tapasztalati eloszlásfüggvénye a $0,5$ helyen mihez konvergál 1 valószínűséggel?

A: $e^{-\lambda}$ **B**: 0 **C**: $\Phi\left(e^{-\lambda}\right)$ **D**: $(\lambda + 1)e^{-\lambda}$ **E**: nem konvergál 1 valószínűséggel

4.) Legyen X egy megfigyelés az $N(0, \sigma^2)$ normális eloszlásból.
Hipotéziseink: $H_0 : \sigma^2 = 1$, $H_1 : \sigma^2 = 4$. A következő próbát végezzük: ha $|X| > 1$, akkor elutasítjuk H_0-t, egyébként elfogadjuk.

a) Mekkora az elsőfajú hiba valószínűsége?

A: $\Phi(1)$ **B**: $2\Phi(1)$ **C**: $1 - \Phi(1)$ **D**: $2(1 - \Phi(1))$ **E**: más

b) Mekkora a próba ereje?

A: $\Phi(1/2)$ **B**: $2\Phi(1/2)$ **C**: $1 - \Phi(1/2)$ **D**: $2(1 - \Phi(1/2))$ **E**: más

5.) Legyenek az X és Y valószínűségi változók függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $(0, 1)$ intervallumon. Mi lesz összegük karakterisztikus függvénye ($t \neq 0$-ra)?

A: $-\frac{\left(e^{it}-1\right)^2}{t^2}$ **B**: $-\frac{1}{t^2}$ **C**: $-\frac{t^2}{(e^{it}-1)^2}$ **D**: $\left(e^{it} - 1\right)^2$ **E**: más

Tesztkérdések megoldása:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5

II. rész

Kifejtős feladatok. A következő feladatok megoldását a kapott lapokon dolgozza ki! Minden feladat 8 pontot ér. A teljes pontszámhoz helyes végeredmény és jó indoklás is szükséges.

1.) Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = xe^{-x(y+1)}$, ha $x, y \geq 0$ és 0 különben. Határozza meg $E(X \mid Y)$-t!

2.) Legyenek X_i, $i = 1, 2, \ldots$ független, azonos eloszlású, 0 várható értékű valószínűségi változók. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ és $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$.
Bizonyítsa be, hogy $\left(S_n^2\right) - nE\left(X_1^2\right)$ martingál $\mathcal{F}_n$-re nézve, ha $E\left(X_1^2\right) < \infty$!

3.) Egy zsákban 3 kocka van, ezek közül 2 cinkelt. Az egyik cinkelten a hatos valószínűsége 1/3, a másikon 1/4. Kihúzunk egy kockát véletlenszerűen (minden kockát azonos valószínűséggel választunk).
Feltéve, hogy 5 dobásból pontosan kétszer dobtunk hatost, mennyi az esélye, hogy a kocka szabályos?

4.) X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg $\mid X \mid$ várható értékét és szórásnégyzetét!

5.) Legyen az $X_1, X_2, \ldots, X_{n+m}$ minta első n eleme λ, a maradék m eleme pedig 2λ paraméterű exponenciális eloszlású. Határozza meg az ismeretlen λ paraméter maximum likelihood becslését!

Azonosító:

Pontozás (a javító tölti ki):

	1	2	3	4	5	Összesen
II. rész						
I. rész						
Mindösszesen						