Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak matematika felvételi
2020. május 27.

I. rész

Tesztkérdések. Rossz válasz: -2 pont, minden egyes jó válasz 5 pont. Amennyiben nem ír választ, akkor nincs levonás. Alaposan ellenőrizze le, hogy nem egyezik-e az eredménye valamelyik megadott válasszal, csak más alakban megadva. A válaszokat írja kézzel egy papírlapra. A lapon a tesztkérdések sorszámai és az azokra adott válaszok szerepeljenek a kitűzésnek megfelelő sorrendben. A Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

1.) Van két telefontöltőnk, az egyik rossz, ez minden kipróbálásnál a többitől függetlenül 20% valószínűséggel működik, a másik jó, ez minden kipróbálásnál a többitől függetlenül 90% valószínűséggel működik. Kívülről nem tudjuk őket megkülönböztetni, ezért kiválasztjuk valamelyiket, azonos valószínűséggel választva mindkettőt, és az első sikeres működésig próbálgatjuk.
Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott töltő a harmadik kipróbálásnál működik először?
A: $(\frac{1}{2}\cdot 0,1+\frac{1}{2}\cdot 0,8)^2(\frac{1}{2}\cdot 0,9+\frac{1}{2}\cdot 0,2)$
B: $(\frac{1}{2}\cdot 0,9+\frac{1}{2}\cdot 0,2)^3$
C: $\frac{1}{2}\cdot 0,9+\frac{1}{2}\cdot 0,2$
D: $\frac{1}{2}\cdot 0,9\cdot 0,1^2+\frac{1}{2}\cdot 0,2\cdot 0,8^2$
E: $\frac{1}{2}\cdot 0,9^3+\frac{1}{2}\cdot 0,2^3$

2.) Egy dobókockával dobunk 100-szor. A nullhipotézisünk az, hogy a dobókocka szabályos, azaz mind a hat számnak 1/6 a valószínűsége. Az elvégzett próba során a kritikus érték $11,1$, a próbastatisztika értéke pedig $18,8$ lett. Melyik igaz az alábbiak közül:
A: t-próbát végeztünk, a nullhipotézist elfogadjuk
B: t-próbát végeztünk, a nullhipotézist elutasítjuk
C: F-próbát végeztünk, a nullhipotézist elfogadjuk
D: F-próbát végeztünk, a nullhipotézist elutasítjuk
E: χ^2-próbát végeztünk, a nullhipotézist elfogadjuk
F: χ^2-próbát végeztünk, a nullhipotézist elutasítjuk

3.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók, ismeretlen m várható értékkel és ismeretlen $\sigma > 0$ szórással. Melyik igaz az alábbiak közül?
A: az m maximum likelihood becslése nem egyértelmű
B: a σ maximum likelihood becslése nem egyértelmű
C: az m-re adott maximum likelihood becslés torzítatlan becslése a várható értéknek
D: a σ-ra adott maximum likelihood becslés torzítatlan becslése a szórásnak

4.) Legyenek X és Y függetlenek, geometriai eloszlásúak 1/2 illetve 1/3 paraméterrel (értékkészletük $1, 2, \ldots$).
a) Mennyi $P(X+Y=4)$?
A: 209/1296
B: 2/36
C: 1715/20736
D: 37/216
E: más
b) Mennyi $X+2Y$ szórása?
A: $\sqrt{26}$
B: $\sqrt{14}$
C: $\sqrt{8}$
D: $\sqrt{2}+\sqrt{12}$
E: más

5.) Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó.
Mennyi lesz $P(\Phi(X) < 0,7)$?
A: $\sqrt{0,7}$
B: $\sqrt{2\log 0,7\sqrt{2\pi}}$
C: 0,3
D: nincs értelmezve
E: más

6.) Frissen gyártott gépet tesztelünk, 10 ugyanolyan gombja van. H_0: a gép gombjai működnek, H_1: van hibás. A következő próbát alkalmazzuk: véletlenszerűen választunk két különböző gombot és azokat megnyomjuk. Amennyiben mindkettő jó, H_0-t fogadjuk el, különben elvetjük.
a) Mennyi az elsőfajú hiba valószínűsége?
A: 1/5
B: 0
C: 1/100
D: 19/100
E: más
b) Mennyi a próba ereje, ha 3 hibás gomb van?
A: 343/1000
B: 657/1000
C: 8/15
D: 1
E: más

II. rész

Kifejtős feladatok. A következő feladatok megoldását a a tesztkérdésektől eltérő lapon (lapokon) dolgozza ki! Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszámhoz helyes végeredmény és jó indoklás is szükséges.

1.) Egy osztályba 15 fiú és 15 lány jár. A szalagavató előtt minden fiú kiválaszt véletlenszerűen egy lányt, mindenkit azonos valószínűséggel választva. Mennyi a valószínűsége, hogy van olyan lány, akit pontosan 6 fiú kér fel táncolni?

2.) Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx+1 & x,y \geq 0, x+y < 1 \\ \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Határozza meg c-t és $E(X|Y)$-t!

3.) 100 pénzérmét kiöntöttünk az asztalra, amelyik fejet mutatott, úgy hagytuk, amelyik írást, azt még egyszer feldobtuk. Végül 64 fej lett az asztalon. Adjon maximum likelihood becslést a fej valószínűségére, feltéve hogy a pénzérmék ugyanolyanok!

4.) Aladár és Béla a következő játékot játsszák. Adott egy 100 forintos és egy 50 forintos (nem feltétlenül szabályos) pénzérme, a fej valószínűsége mindkettőn $0 < p < 1$. Továbbá adott egy valós $0 < q < 1$ szám, valamint egy számláló, amely 0-ról indul. Egyszerre feldobják mindkét érmét, és ha a két eredmény különböző, akkor 1-et hozzáadnak a számlálóhoz. Ha a két dobás azonos, akkor nem változtatnak a számláló értékén. Ezt addig ismétlik, amíg egy olyan dobás ki nem jön, amiben a 100 forintoson fej és az 50 forintoson írás nem lesz. Miután kijött ez a dobás, megnézik hogy a számlálónak mi az értéke. Ez az érték legyen S. Ha q-nak a 2-es számrendszerben leírt alakjában a "kettedes" vessző utáni S. számjegye 1, akkor Aladár nyer, ha 0 akkor pedig Béla. Mekkora valószínűséggel nyer Aladár?