Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak matematika felvételi 2021.

I. rész

Tesztkérdések. Rossz válasz: -2 pont, minden egyes jó válasz 4 pont. A válaszokat írja a szöveg utáni táblázatba (a szövegben megjelölt válaszokat nem fogjuk elfogadni). A Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

1.) Egy társasjátékban minden körben két dobókockával dobnak (az egyes körök egymástól függetlenek). Mindkét dobókockánál a hatos dobás valószínűsége p, ahol p ismeretlen paraméter ($0 < p < 1$). 100 körből 34 olyan volt, ahol legalább az egyik dobás hatos lett. Az alábbiak közül melyik lesz a p paraméter maximumlikelihood-becslése (két tizedesjegyre kerekítve)?
A: 17%
B: 19%
C: 21%
D: 23%
E: 25%

2.) Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az $\{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ háromszögön. Hogyan adható meg az $\mathbb{E}(X^2|Y)$ feltételes várható érték?
A: $1/2$
B: $1/3$
C: $Y/2$
D: $Y^2/3$
E: $Y^2/12$
F: egyéb

3.) Tízszer dobtunk egy szabályos dobókockával. Tekintsük a következő valószínűségi változókat: X a dobott hatosok száma, Y a dobott egyesek száma, Z a hatosok száma az első 5 dobásból, V a kettesek száma az utolsó 5 dobásból. Melyik pár korrelációs együtthatója lesz pozitív?
A: X és Z
B: X és Y
C: V és Z
D: X és V
E: egyik sem

4.) Húsz félliteres üdítőital cukortartalmát mérték meg (grammban). A mintaátlag $53,7$, a korrigált tapasztalati szórás $3,2$ lett. Melyik állítás igazak az alábbiak közül a cukortartalom ismeretlen m várható értékére? A méréseket függetlennek, normális eloszlásúnak tételezzük fel.
A: $\alpha = 0,05$ és $\alpha = 0,01$ szignifikanciaszint (terjedelem) esetén is m szignifikánsan több 50-nél
B: $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) esetén m szignifikánsan több 50-nél, de $\alpha = 0,01$ esetén nem igaz, hogy m szignifikánsan több 50-nél
C: $\alpha = 0,01$ szignifikanciaszint (terjedelem) esetén m szignifikánsan több 50-nél, de $\alpha = 0,05$ esetén nem igaz, hogy m szignifikánsan több 50-nél
D: sem $\alpha = 0,05$, sem $\alpha = 0,01$ szignifikanciaszint (terjedelem) esetén nem állíthatjuk, hogy m szignifikánsan több 50-nél

5.) Legyen az (X_n) Poisson-eloszlású valószínűségi változókból álló sorozat úgy, hogy minden $n \geq 1$-re $\mathbb{E}(X_n) = 4n^2$ teljesül. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X_n - 4n^2 < 2n)$ valószínűség határértékét $n \to \infty$ esetén. Itt Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli. **B**: $\Phi(1)$
C: $\Phi(2)$
D: $\Phi(4)$
E: $\Phi^{-1}(2)$
F: 2
G: 4
H: egyéb

6.) A játékosfiókba nyúlva egy marék dobókockát szedtünk ki - számuk Poisson(5) eloszlású - majd mind az asztalra szórtuk őket. Mi a látottak összegének karakterisztikus függvénye a $t \neq 0$ helyen?
A: $e^{5\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{e^{7it}-1}{e^{it}-1}-1\right)}$
B: $\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{e^{7it}-1}{e^{it}-1}\right)^5$
C: $e^{5e^{6it}}$
D: 0
E: egyéb

7.) Legyen X és Y független valószínűségi változó az Ω valószínűségi mezőn. Legyen $Z = X+Y$, számítsuk ki Z sűrűségfüggvényének (feltételezzük, hogy folytonos) értékét a 8 helyen, ha

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases}0,5 \text{ ha } 3 \leq x \leq 5, \text{ és } 0 \text{ különben}\end{cases}$$

A: 0,5
B : 2
C: 1
D: Z-nek nincs sűrűségfüggvénye
E: egyéb

II. rész

Kifejtős feladatok. Mindegyik feladat 10 pontos. A teljes pontszámhoz helyes végeredmény és jó indoklás is szükséges.

8.) Egy táncórán 10 pár vesz részt. Egy gyakorlathoz kiválasztanak 6 embert véletlenszerűen, a párokat figyelmen kívül hagyva, minden hatos csoportot azonos valószínűséggel választva. Legyen X az olyan párok száma, melyeknek mindkét tagját kiválasztották ehhez a gyakorlathoz. Számítsuk ki X várható értékét és szórását.

9.) Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye $c(x + y^2)$, ha $0 < x < 2$ és $0 \leq y \leq 2$, és 0 különben, ahol c megfelelőn választott valós szám. Határozzuk meg X és Y kovarianciáját.

10.) Bence és Hanna találkozót beszéltek, ahova mindketten 15 és 16 óra között érkeznek. Az érkezésük egymástól független, az időpont pedig egyenletes eloszlású a $[15, 16]$ intervallumon. Legyen X az, hogy a korábban érkezőnek mennyit kell a később érkezőre várnia. Számítsuk ki X várható értékét.

11.) Egy szabályos kockát dobálunk legfeljebb addig, míg egyest nem kapunk. Annyiszor ezer Ft-ot nyerünk, amennyi az utolsó dobott szám. Milyen stratégiával játsszunk, ha a lehető legnagyobb nyereményt szeretnénk elérni? Mennyi lesz ekkor a nyereményünk várható értéke?