Valószínűségszámítás és statisztika praktikum
2022. november 22.

Bizonyítsuk be a martingál tulajdonságot a következő esetekben!

1. $Y_n = t^n \left(\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \right)^{S_n}$, $F_n = \sigma(S_1,...,S_n)$, ahol $0 < t < 1$ rögzített, S_n szimmetrikus bolyongás.

2. $Z_n = 2^n \prod_{i=1}^{n} X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$, ahol $X_1, X_2,\ldots$ független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

3. $Z_n = \exp\left(\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) - \dfrac{n\lambda^2}{2} \right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$, $(\lambda > 0)$, ahol $X_1, X_2,\ldots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg azt is, hogy $\mathrm{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \dfrac{\alpha k}{2} \right) > \beta \right) \le e^{-\alpha\beta}$ $(\forall \alpha, \beta > 0)$!

4. $Z_n = \left(\lambda^n \prod_{i=1}^{n} \left(X_{2i-1} + X_{2i} \right) \right)^{-1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_{2n})$, ahol $X_1, X_2,\ldots$ független, λ-exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

Mutassuk meg, hogy

5. $\left(\chi(\upsilon > n), \mathcal{F}_n \right)$ szupermartingál és $\left(\chi(\upsilon \le n), \mathcal{F}_n \right)$ szubmartingál, ha υ megállási idő!