Valószínűségszámítás és statisztika praktikum
2022. október 4.

1.$a)$ $A \subset X$, $\sigma(A) = ?$

$b)$ $A_1, \dots, A_n \subset X$, $\sigma(A_1, \dots, A_n) = ?$

2.$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ / A_n – ekből végtelen sok következik be/

$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ / A_n – ekből véges sok kivételével mindegyik bekövetkezik/

Mutassuk meg, hogy

$\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$,

$\overline{\lim}(A_n \cup B_n) = \overline{\lim} A_n \cup \overline{\lim} B_n$,

$\overline{(\underline{\lim} A_n)} = \overline{\lim}(\overline{A_n})$ / $\overline{A} = X - A$, ellentett esemény/!

3.x_n valós, $A_n = (-\infty, x_n)$, $x = \overline{\lim} x_n$.

Mutassuk meg, hogy

$(-\infty, x) \subseteq \overline{\lim} A_n \subseteq (-\infty, x]$!

4. $A_{2n+1} = A, A_{2n} = B.\ \overline{lim} A_n = ?, \underline{lim} A_n = ?$

5. Amennyiben $\overline{lim} A_n = \underline{lim} A_n$, akkor $\lim A_n = \overline{lim} A_n = \underline{lim} A_n$. Az A_n halmazok diszjunktak. $\lim A_n =$?

6. a) Legyen Ω tetszőleges halmaz, az $\mathcal{A}$ halmazrendszer Ω összes részhalmazából áll. Legyen $A \subseteq \Omega$ -ra $\mu(A) = \begin{cases} |A|, \text{ ha } A \text{ véges} \\ \infty, \text{ ha } A \text{ végtelen} \end{cases}$. Mutassuk meg, hogy μ mérték!

b) Legyen $\Omega = \{x_1, x_2, \dots\}$ megszámlálható halmaz, az $\mathcal{A}$ halmazrendszer Ω összes részhalmazából áll. Legyenek p_i-k nemnegatív számok és $A \subseteq \Omega$ -ra $\mu(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$. Mutassuk meg, hogy μ mérték!

7. Legyen Ω megszámlálhatóan végtelen halmaz, az $\mathcal{A}$ halmazrendszer Ω összes részhalmazából áll. Legyenek p_i-k nemnegatív számok és $A \subseteq \Omega$ -ra $\mu(A) = \begin{cases} 0, \text{ ha } A \text{ véges} \\ \infty, \text{ ha } A \text{ végtelen} \end{cases}$. Mutassuk meg, hogy μ végesen additív halmazfüggvény, de nem mérték!

8. Legyen μ mérték (Ω, $\mathcal{A}$)-n. $A \subseteq \Omega$ nullmértékű, ha $\exists B \in \mathcal{A}$, hogy $\mu(B) = 0$ és $A \subseteq B$. Az $\mathcal{A}$ σ-algebra teljessé tétele az
$\overline{\mathcal{A}} = \{A \subseteq \Omega: \exists C \in \mathcal{A}$ és B nullmértékű, hogy $A = C \cup B\}$halmazrendszer. Mutassuk meg, hogy ez is σ-algebra!

9. Mutassuk meg, hogy egy halmaz pontosan akkor mérhető, ha indikátora Borel-mérhető függvény!

10. $|f|$ mérhető függvény. Mérhető-e f?

11. Legyen $X = \mathbb{N}, S = X$összes részhalmaza, f_n=χ$\{1; \dots; n\}$. Igaz-e, hogy f_n m.m. konvergens? Igaz-e, hogy f_n m.m. egyenletesen Cauchy?