Valószínűségszámítás

4. előadás

Arató Miklós

2023.03.23.

Tartalomjegyzék

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye** $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye**
$F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{y \downarrow x} F_\xi(y) - F(x) = P(\xi = x)$$

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye**
$F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.
$\lim_{y \downarrow x} F_\xi(y) - F(x) = P(\xi = x)$
Diszkrét esetben $P(\xi = x_k) = F_\xi(x_{k+1}) - F_\xi(x_k)$

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Állítás: Az F_ξ eloszlásfüggvényre teljesülnek az alábbiak:

1. F_ξ monoton növő.
2. $\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$ és $\lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
3. F_ξ balról folytonos és jobbról létezik a határértéke minden $x \in \mathbb{R}$ helyen.

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, ha $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ minden $x \in \mathbb{R}$, ahol f véges sok ponttól eltekintve folytonos

f: sűrűségfüggvény

Meghatározás

Definíció: A ξ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, ha $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ minden $x \in \mathbb{R}$, ahol f véges sok ponttól eltekintve folytonos

f: sűrűségfüggvény

$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, ds = 1, f(x) \geq 0$

$F'(x) = f(x)$ véges sok pontot kivéve

Egyenletes eloszlás intervallumon

Tekintsünk $[a, b]$-n geometriai valószínűségi mezőt.
$\xi(w) = w$.

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & : \; x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & : \; a < x < b \\ 1 & : \; b \le x \end{cases} .$$

Az ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük az $[a, b]$ intervallumon.
Jelölés: $E(a, b)$ vagy $U(a, b)$.

Sűrűségfüggvény: $f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & : \; x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & : \; x \in [a, b] \end{cases}$.

λ-exponenciális eloszlás

τ: egy izzó élettartama
örökifjú tulajdonság: $P(\tau > t + s \mid \tau > s) = P(\tau > t)$, ahol $t, s > 0$
$G(t) = P(\tau > t)$, így $\frac{G(t+s)}{G(s)} = \frac{P(\tau>t+s \ , \ \tau>s)}{P(\tau>s)} = G(t)$, azaz
$G(t + s) = G(t) \cdot G(s) \Rightarrow$.
$G(t) = e^{-\lambda t}$ alakú. Mivel $G(t)$ valószínűség, ezért $\lambda > 0$.
Az eloszlásfüggvény balról folytonossága miatt

$$P(\tau < t) \geq \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) \geq \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau < t - \varepsilon) = P(\tau < t) \Rightarrow$$

$$P(\tau < t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (1 - e^{-\lambda(t-\varepsilon)}) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

λ-exponenciális eloszlás (folyt.)

λ-exponenciális eloszlású:

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & : \quad 0 < t \end{cases}$$

sűrűségfüggvény: $f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \le 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & : \quad 0 < t \end{cases}$.

Könnyen látható a fordított irány is, tehát, hogy egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó örökifjú eloszlású.

Gamma-eloszlás

$\xi \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$ eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} & : \quad 0 < x \end{cases},$$

ahol $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \, dx$.

(Megj.: $\Gamma(n) = (n-1)!$.)

Standard normális eloszlás

A ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \ (x \in \mathbb{R}).$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}}\, dt\, ds \overset{(\varphi,r)}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, dr =$$

$$2\pi \cdot \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\pi \Rightarrow . \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$$

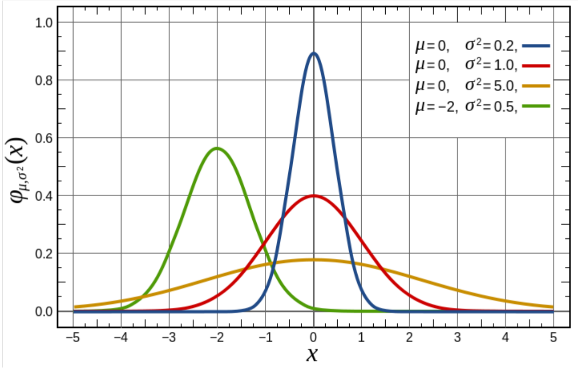
eloszlásfüggvény: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$

Jelölése: $N(0,1)$.

Normális eloszlás

ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású $\Rightarrow \eta = m + \sigma\xi$ normális eloszlású.
Eloszlásfüggvénye:
$P(m + \sigma\xi < x) = P(\xi < \frac{x-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$.
A sűrűségfüggvény: $f_{m+\sigma\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.
Ez a normális eloszlás m és σ^2 paraméterekkel, jelölése: $N(m, \sigma^2)$.
Fordítva, ha $\eta \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\frac{\eta - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Haranggörbe



ábra: Normális sűrűségfüggvények

Táblázat

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,45	0,6736	0,90	0,8159	1,35	0,9115	1,80	0,9641	2,50	0,9938
0,01	0,5040	0,46	0,6772	0,91	0,8186	1,36	0,9131	1,81	0,9649	2,52	0,9941
0,02	0,5080	0,47	0,6808	0,92	0,8212	1,37	0,9147	1,82	0,9656	2,54	0,9945
0,03	0,5120	0,48	0,6844	0,93	0,8238	1,38	0,9162	1,83	0,9664	2,56	0,9948
0,04	0,5160	0,49	0,6879	0,94	0,8264	1,39	0,9177	1,84	0,9671	2,58	0,9951
0,05	0,5199	0,50	0,6915	0,95	0,8289	1,40	0,9192	1,85	0,9678	2,60	0,9953
0,06	0,5239	0,51	0,6950	0,96	0,8315	1,41	0,9207	1,86	0,9686	2,62	0,9956
0,07	0,5279	0,52	0,6985	0,97	0,8340	1,42	0,9222	1,87	0,9693	2,64	0,9959
0,08	0,5319	0,53	0,7019	0,98	0,8365	1,43	0,9236	1,88	0,9699	2,66	0,9961
0,09	0,5359	0,54	0,7054	0,99	0,8389	1,44	0,9251	1,89	0,9706	2,68	0,9963
0,10	0,5398	0,55	0,7088	1,00	0,8413	1,45	0,9265	1,90	0,9713	2,70	0,9965
0,11	0,5438	0,56	0,7123	1,01	0,8438	1,46	0,9279	1,91	0,9719	2,72	0,9967
0,12	0,5478	0,57	0,7157	1,02	0,8461	1,47	0,9292	1,92	0,9726	2,74	0,9969
0,13	0,5517	0,58	0,7190	1,03	0,8485	1,48	0,9306	1,93	0,9732	2,76	0,9971
0,14	0,5557	0,59	0,7224	1,04	0,8508	1,49	0,9319	1,94	0,9738	2,78	0,9973
0,15	0,5596	0,60	0,7257	1,05	0,8531	1,50	0,9332	1,95	0,9744	2,80	0,9974
0,16	0,5636	0,61	0,7291	1,06	0,8554	1,51	0,9345	1,96	0,9750	2,82	0,9976
0,17	0,5675	0,62	0,7324	1,07	0,8577	1,52	0,9357	1,97	0,9756	2,84	0,9977
0,18	0,5714	0,63	0,7357	1,08	0,8599	1,53	0,9370	1,98	0,9761	2,86	0,9979
0,19	0,5753	0,64	0,7389	1,09	0,8621	1,54	0,9382	1,99	0,9767	2,88	0,9980
0,20	0,5793	0,65	0,7422	1,10	0,8643	1,55	0,9394	2,00	0,9772	2,90	0,9981
0,21	0,5832	0,66	0,7454	1,11	0,8665	1,56	0,9406	2,02	0,9783	2,92	0,9983
0,22	0,5871	0,67	0,7486	1,12	0,8686	1,57	0,9418	2,04	0,9793	2,94	0,9984

Meghatározás

Definíció: A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha $P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i)$ minden $x_1, \dots, x_n$-re.

Definíció: A $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha minden n-re $\xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek.

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek és g_i Borel-mérhető. Ekkor $g_1(\xi_1), \dots, g_n(\xi_n)$ is függetlenek.

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ diszkrétek. Ekkor pontosan akkor függetlenek, ha $P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_i)$ minden x_i-re.

Diszkrét konvolúciós formula

Legyenek ξ és η függetlenek, értékkészletük pedig $\{x_k\}$ és $\{y_l\}$.

$$P(\xi+\eta=z)=P\Big(\bigcup_{x_k+y_l=z}\{\xi=x_k,\eta=y_l\}\Big)=$$

$$\sum_{x_k+y_l=z}P(\xi=x_k,\eta=y_l)=\sum_{x_k+y_l=z}P(\xi=x_k)\cdot P(\eta=y_l).$$

Binomiálisak konvolúciója

Legyenek $\xi \sim B(n_1, p)$ és $\eta \sim B(n_2, p)$ függetlenek. Ekkor $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Ugyanis $\xi + \eta$ értékkészlete $0, 1, \ldots, n_1 + n_2$, így

$$P(\xi + \eta = k) = \sum_{l=0}^{k} P(\xi = l) \cdot P(\eta = k - l) =$$

$$\sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n_1-l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^{k-l} \cdot (1-p)^{n_2-k+l} =$$

$$\sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} =$$

$p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \binom{n_1+n_2}{k}$, azaz $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Binomiálisak konvolúciója

Legyenek $\xi \sim B(n_1, p)$ és $\eta \sim B(n_2, p)$ függetlenek. Ekkor $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.
Ugyanis $\xi + \eta$ értékkészlete $0, 1, \ldots, n_1 + n_2$, így

$$P(\xi + \eta = k) = \sum_{l=0}^{k} P(\xi = l) \cdot P(\eta = k - l) =$$

$$\sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n_1-l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^{k-l} \cdot (1-p)^{n_2-k+l} =$$

$$\sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} =$$

$p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \binom{n_1+n_2}{k}$, azaz $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Binomiálisak konvolúciója (folyt.)

egyszerűbben is kiszámítható: legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású p-indikátorok, ekkor $X_1 + \ldots + X_n \sim B(n, p)$, $X_{n+1} + \ldots + X_{n+m} \sim B(m, p)$, és így $X_1 + \ldots + X_{n+m} \sim B(n + m, p)$.

Poisson eset

Legyenek $\xi \sim \lambda$-Poisson és $\eta \sim \mu$-Poisson függetlenek. Ekkor $\xi + \eta \sim (\lambda + \mu)$-Poisson.

Ugyanis $P(\xi + \eta = k) = \sum_{l=0}^{k} P(\xi = l) \cdot P(\eta = k - l) =$

$\sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda^l \cdot e^{-\lambda}}{l!} \cdot \frac{\mu^{k-l} \cdot e^{-\mu}}{(k-l)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \cdot \lambda^l \cdot \mu^{k-l} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \cdot (\lambda + \mu)^k$, $\Rightarrow$

$(\lambda + \mu)$ paraméterű Poisson-eloszlást kapunk.

Konvolúciós formula

Legyenek ξ és η független, abszolút folytonos valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ is abszolút folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-y) \cdot f_\eta(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(y) \cdot f_\eta(x-y)\, dy.$$

Exponenciálisak konvolúciója

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ független λ-exponenciális valószínűségi változók
$\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \Rightarrow$.

Állítás: η_n sűrűségfüggvénye $g_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{n-1} \cdot \lambda^n \cdot e^{-\lambda x}}{(n-1)!} & x > 0 \end{cases}$.

Bizonyítás: n-re vonatkozó teljes indukció
$n = 1$ rendben . Tegyük fel, hogy n-ig igaz az állítás. $\Rightarrow (n+1)$-re:

$$g_{n+1}(x) = f_{(\xi_1+\ldots+\xi_n+\xi_{n+1})}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(x-y)}_{g_n(x-y)} \cdot \underbrace{f_{\xi_{n+1}}(y)}_{g_1(y)} \, dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(x-y)^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda(x-y)}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y} \, dy =$$

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda x}}{n!} \int_0^x n(x-y)^{n-1} dy = \frac{x^n \lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda x}$$

"Buszok száma"

Olyan autóbuszjáratot, ahol a buszok követési ideje egymástól független, azonos λ-exponenciális eloszlású.
ξ_1 : az első busz beérkezési ideje, ξ_2 : az első és a második busz érkezése közötti idő, stb. N busz érkezik a $[0, t)$-ben.

$$P(N = n) = P(N \geq n) - P(N \geq n+1) = P(\eta_n < t) - P(\eta_{n+1} < t) =$$

$$\int_0^t \frac{x^{n-1}\lambda^n e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx - \int_0^t \frac{x^n \lambda^{n+1} e^{-\lambda x}}{n!} dx =$$

$$\frac{\lambda^n}{n!} \left\{ \int_0^t n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx - \underbrace{\int_0^t x^n \lambda e^{-\lambda x} dx}_{[x^n e^{-\lambda x}]_0^t - \int_0^t n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx} \right\} = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},$$

Meghatározás és tulajdonságok

Definíció: $\xi \geq 0$ **abszolút folytonos eloszlású**, ekkor
$E\xi = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_\xi(x)\ dx$.

Definíció: ξ **abszolút folytonos eloszlású**, ekkor
$E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, ha $\min(E\xi^+, E\xi^-) < \infty$.

$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_\xi(x)\ dx$

$\xi \geq 0 \Rightarrow E\xi = \int_0^\infty (1 - F_\xi(y))\ dy$

ξ, η függetlenek, $E|\xi|$, $E|\eta|$ végesek. $\Rightarrow E|\xi \cdot \eta|$ is véges és
$E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$.

Abszolút folytonos eloszlású példák

1. $\xi \sim E(a,b)$ esetén $E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\ dx = \frac{a+b}{2}$.
2. λ-**exponenciális** eloszlás várható értéke $E\xi = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\ dy = \frac{1}{\lambda}$.
3. $\xi \sim N(0,1)$ esetén $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 0$, hiszen a sűrűségfüggvény szimmetrikus, így az integrálban egy páratlan függvény szerepel (továbbá az integrál konvergens, mert elég nagy x-re $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ felülről becsülhető az e^{-x} függvénnyel). Általánosan pedig $m + \sigma\xi \sim N(m, \sigma^2)$ esetén $E(m + \sigma\xi) = m + \sigma \cdot E\xi = m$.

Szórásnégyzet

Definíció: $D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2$ a ξ valószínűségi változó **szórásnégyzete**, ha az $E\xi$ létezik és véges.

Definíció:ξ **szórása** a szórásnégyzet négyzetgyöke, azaz $D\xi = \sqrt{D^2\xi}$.

1. A szórásnégyzet mindig nemnegatív.
2. $D^2\xi < \infty \Leftrightarrow E\xi^2 < \infty$
   Ugyanis: $(\Leftarrow)$ $|\xi| \leq 1 + |\xi|^2$ és $E\xi^2 < \infty$ miatt $E\xi < \infty$, így $(\xi - E\xi)^2 \leq 2(\xi^2 + E\xi^2)$, $(\Rightarrow)$ $\xi^2 \leq 2((\xi - E\xi)^2 + (E\xi)^2)$.
3. $D^2\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$:, $D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2 =$
   $E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + (E\xi)^2$.
4. Minden A valós számra $E(\xi - A)^2 \geq D^2\xi$:,
   $E(\xi - A)^2 = E(\xi^2 - 2A\xi + A^2) =$
   $E\xi^2 - (E\xi)^2 + (E\xi)^2 - 2A \cdot E\xi + A^2 = D^2\xi + (E\xi - A)^2$.

Szórásnégyzet (folyt.)

5. $D^2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = c$:
   Ha $\xi = c$, akkor $\xi - E\xi = c - c = 0 \Rightarrow E(\xi - E\xi)^2 = 0$.
   Ha $E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Rightarrow (\xi - E\xi)^2 = 0 \Rightarrow \xi = E\xi$
6. $D^2(a\xi + b) = a^2 D^2\xi$:
   $E(a\xi + b - aE\xi - b)^2 = E(a^2(\xi - E\xi)^2) = a^2 E(\xi - E\xi)^2$.

Szórásnégyzet (folyt.)

7. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ páronként függetlenek és $D^2\xi_1, \ldots, D^2\xi_n < \infty \Rightarrow D^2(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D^2\xi_i$:.

$$D^2(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = E\Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)\Big)^2 =$$

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)^2 + \sum_{i\neq j}(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(\xi_i - E\xi_i)^2}_{D^2\xi_i} + \sum_{i\neq j} \underbrace{E\left((\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\right)}_{=E(\xi_i - E\xi_i)\cdot E(\xi_j - E\xi_j) = 0\cdot 0}.$$

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D^2\xi_i.$$

Szórásnégyzet példák

1. A **indikátorának** szórásnégyzete
$D^2\chi_A = E\chi_A^2 - (E\chi_A)^2 = E\chi_A - (E\chi_A)^2 = P(A)\cdot(1-P(A))$.

2. $\xi \sim B(n,p)$ (**binomiális valószínűségi változó**)
$X_1,\dots,X_n$ független p-ind. $\Rightarrow X_1+\dots+X_n \sim B(n,p)$ és
$D^2\xi = D^2(X_1+\dots+X_n) = D^2X_1+\dots+D^2X_n = n\cdot p\cdot(1-p)$.

3. η λ-**exponenciális** valószínűségi változó,
$E\eta = \frac{1}{\lambda}$.
$E\eta^2 = \int_0^\infty x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx = \left[x^2(-e^{-\lambda x})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x\cdot e^{-\lambda x}\,dx$
az összeg első tagja 0, az integrál
$\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}E\eta \Rightarrow E\eta^2 = \frac{2}{\lambda^2}$.
$D^2\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Szórásnégyzet példák (folyt.)

4. $\xi \sim N(0,1)$ (**normális** eloszlású valószínűségi változó)

$$E\xi = 0 \Rightarrow D^2\xi = E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[x \cdot (-e^{-\frac{x^2}{2}})\right]_{-\infty}^{\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=1} = 1.$$

Általánosan $m + \sigma\xi \sim N(m, \sigma^2)$

$$D^2(m + \sigma\xi) = \sigma^2 \cdot D^2\xi = \sigma^2.$$

Szórásnégyzet példák (folyt.)

5. $\eta \sim \lambda$-**Poisson**.

$E\eta = \lambda$.

$$E\eta^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!} =$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!} = (\lambda^2 \cdot 1) + (\lambda) \Rightarrow$$

$$D^2\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$